Analisis Komparatif Metode Jacobian Dan Metode Euler Dalam Kasus Proyeksi Jumlah Penduduk

Siti Dwi Rahayu Septiani^{1,a)}, Abdul Latip^{2,b)}, Wulan Nurul Kamilah^{3,c)}, Cecep
 Suwanda^{4,d)}

^{1,2,3,4} Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Bale Bandung, Bandung, Indonesia

^{a)} sitidwirahayu@unibba.ac.id

^{b)}abduld_jabar9@guruinovatif.com

^{c)} wulannurulk@unibba.ac.id

Abstrak. Pemodelan matematika merupakan suatu proses mempresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis. Pada penelitian ini pemodelan matematika digunakan untuk memperkirakan jumlah penduduk, seiring dengan meningkatnya jumlah penduduk yang bisa saja mengakibatkan berbagai macam permasalahan, maka peneliti mencoba untuk memprediksi jumlah penduduk, sehingga pemerintah dapat mengambil suatu keputusan untuk mengatasi permasalahan yang disebabkan oleh angka kepadatan penduduk yang tinggi. Model matematika jumlah penduduk pada penelitian ini menggunakan sistem persamaan nonlinear, yaitu dengan menggunakan metode Jacobian dan metode Euler. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah penduduk di Kecamatan Baleendah dengan jangka waktu 9 (sembilan) tahun, yaitu dari tahun 2009 sampai tahun 2017. Model terbaik adalah model yang hasil prediksinya mendekati nilai hasil observasi. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa metode Euler merupakan metode terbaik untuk prediksi jumlah penduduk. Dengan demikian metode Euler bisa digunakan untuk proyeksi jumlah penduduk.

PENDAHULUAN

Proyeksi laju pertumbuhan penduduk dapat dihitung menggunakan pemodelan matematika. Model matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan suatu proses mempresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis [1]. Menentukan model matematika dapat dilakukan dengan menggunakan sistem persamaan linear, dan sistem persamaan nonlinear. Sistem persamaan nonlinear merupakan kumpulan dari beberapa persamaan nonlinear dengan fungsi tujuannya saja atau dengan fungsi kendala yang berbentuk nonlinear, yaitu pangkat dari variabelnya lebih dari satu. Pada penelitian ini penulis menggunakan sistem persamaan nonlinear, hal ini berdasarkan pada penelitian yang dilakukan oleh Aminah Ekawati dan Lina Aryati [2], yang berjudul “*Model Nonlinear Penyakit Diabetes*”. Pada penelitian tersebut disinggung tentang memperkirakan jumlah penderita penyakit diabetes pada tahun-tahun mendatang dengan menggunakan metode nonlinear.

Terdapat metode khusus untuk menghitung metode nonlinear, di antaranya adalah metode numerik, jika fungsi tujuannya tidak bisa diselesaikan secara analitik. Metode Jacobian dan metode Euler merupakan contoh dari metode numerik. Metode Jacobian adalah metode penyelesaian persamaan melalui proses iterasi dengan menggunakan persamaan. Sedangkan metode Euler digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik ketika nilai fungsi pada keadaan awal diketahui.

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\
 x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\
 &\vdots \\
 x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan $k = 0, 1, 2, \dots$

Iterasi dimulai dengan memberikan nilai awal untuk x :

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Kondisi berhenti iterasinya, dapat digunakan galat relatif

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{4}$$

Syarat agar iterasinya konvergen adalah :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=0}^n |a_{ij}|, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{5}$$

Jika syarat diatas dipenuhi, maka kekonvergenan akan dijamin. Kekonvergenannya juga ditentukan pada pemilihan tebakan awal. Tebakan yang terlalu jauh dari solusi sejatinya dapat menyebabkan iterasi divergen.

Metode Euler

Suatu populasi awalnya meningkat secara eksponensial, akan tetapi pada akhirnya mengalami perlambatan dan mendekati kapasitas daya tampungnya karena sumber daya yang terbatas [6]. Pertumbuhan populasi atau disebut sebagai model pertumbuhan logistik, dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = r - \frac{rP(t)}{K} \tag{6}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $P(t)$, diperoleh:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right) \tag{7}$$

Dimana:

$P(t)$ = Jumlah populasi pada saat waktu t ,

r = Laju pertumbuhan,

K = Jumlah penduduk maksimal (daya dukung lingkungan)

Metode Euler adalah salah satu dari metode satu langkah yang paling tua dan paling sederhana dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Dibandingkan dengan beberapa metode lainnya, metode ini paling kurang teliti. Namun demikian metode ini perlu dipelajari mengingat kesederhanaannya dan mudah pemahamannya sehingga memudahkan dalam mempelajari metode lain yang lebih teliti [4].

Diketahui sebuah persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = f(P) \tag{8}$$

Metode numerik dapat digunakan untuk mendekati solusi persamaan pada waktu diskrit. Waktu dibagi kedalam interval Δt , salah satu metode yang digunakan untuk menghitungnya adalah metode Euler, karena:

$$t_i = i \cdot \Delta t,$$

$$P_i = P(t_i),$$

$$\frac{dP}{dt} \approx \frac{\Delta P}{\Delta t},$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{\Delta t} &= \frac{P(t_i + \Delta t) - P(t_i)}{\Delta t} \\ &= \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} \\ &= f(P_i) \end{aligned} \tag{9}$$

Pemecahan dari permasalahan P_{i+1} , dirubah menjadi persamaan diskrit untuk memprediksi nilai P. Dimana P adalah nilai di masa depan, sedangkan P_{i+1} adalah nilai di masa lalu.

$$P_{i+1} = P_i + \Delta t \cdot f(P_i) \tag{10}$$

Dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

Persamaan (10) dapat digunakan untuk memperkirakan solusi persamaan diferensial, yang disini digunakan untuk menghitung populasi penduduk yang berdasarkan pada model logistik. Diketahui persamaan model logistik sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right) \tag{11}$$

Karena data yang digunakan berjumlah beberapa tahun maka rumus umum metode Logistik harus diturunkan terlebih dahulu, sehingga didapatkan rumus baru sebagai berikut:

$$P = \frac{K}{e^{-rt_i \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) + 1}} \tag{12}$$

Dengan $f(P) = \frac{K}{e^{-rt_i \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) + 1}}$, maka persamaan Eulernya menjadi:

$$P_{i+1} = P_i + \frac{K}{e^{-rt_i \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) + 1}} \times h_i \tag{13}$$

Dengan :

$i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

r = Laju pertumbuhan penduduk.

P_i = Jumlah penduduk pada saat waktu ke i

K = Nilai maksimum jumlah penduduk

t = tahun ke $(0, 1, 2 \dots n)$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode Euler sangat sederhana, akan tetapi hasil penyelesaiannya sering merupakan penyelesaian pendekatan dengan nilai galat yang cukup besar, biasanya untuk mengurangi nilai galatnya diambil partisi (h) yang cukup kecil, akan tetapi hal ini akan menambah jumlah iterasinya. Metode ini juga dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial. Penyelesaian dengan metode Euler tidak perlu mencari turunan-turunan fungsi terlebih dahulu [7].

Mean absolute percent error (MAPE) merupakan salah satu metode yang biasa digunakan dalam *forecasting* (peramalan). MAPE menyatakan persentase kesalahan hasil pendugaan atau peramalan terhadap hasil aktual selama periode tertentu yang akan memberikan informasi persentase kesalahan terlalu tinggi atau terlalu rendah.

Secara matematis, rumus MAPE ditulis sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \times 100\% \tag{14}$$

Dimana

y_i = nilai aktual

$\hat{y}_i$ = nilai prediksi

n = jumlah data

Ketentuan nilai persen kesalahan dari MAPE adalah sebagai berikut:

- Jika nilai $MAPE \leq 15\%$ termasuk kategori bagus (bisa dipakai).
- Jika nilai $MAPE > 15\%$ termasuk kategori jelek (tidak bisa dipakai).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data hasil observasi di kantor BPS (Badan Pusat Statistik) Kabupaten Bandung pada bulan Agustus 2019.

Tabel 1. Data Hasil Observasi

No	Tahun	Kelahiran		Kematian		Transmigrasi		Jumlah Penduduk		
		laki-laki	perempuan	laki-laki	Perempuan	Masuk	Keluar	laki-laki	perempuan	total
1	2009	374	337	365	347	1332	1471	110.740	106.263	217.003
2	2010							114.472	109.852	224.324
3	2011							119.294	114.051	233.345
4	2012							120.356	119.267	239.623
5	2013							121.985	126.039	248.024
6	2014	1756	1594	449	426	559	660	128.322	123.674	251.996
7	2015	1727	1567					130.713	125.857	256.570
8	2016							132.924	128.436	261.360
9	2017							135.332	130.860	266.192

Sumber. BPS Kabupaten Bandung

Data di atas didapatkan berdasarkan dengan mengunjungi kantor Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Bandung. Dapat kita lihat pada tabel di atas banyak kolom yang kosong, sehingga penulis berupaya untuk mengisi tabel yang kosong tersebut dengan cara random dengan mengacu kepada angka total jumlah penduduk. Karena dalam menentukan jumlah penduduk diperlukan data yang lengkap, ini berdasar kepada rumus mencari jumlah penduduk yaitu : kelahiran – kematian + imigrasi – emigrasi = jumlah total. Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2. Data Hasil Generate Secara Numerik

No	Tahun	Kelahiran		Kematian		Transmigrasi		Jumlah Penduduk		
		laki-laki	perempuan	laki-laki	perempuan	Masuk	Keluar	laki-laki	Perempuan	Total
0	2009	374	337	365	347	1.332	1.471	110.740	106.263	217.003
1	2010	2.653	2.656	333	337	3.011	329	114.472	109.852	224.324
2	2011	3.355	3.357	346	323	3.308	330	119.294	114.051	233.345
3	2012	2.315	2.523	320	331	2.439	348	120.356	119.267	239.623
4	2013	3.016	3.300	323	333	3.084	343	121.985	126.039	248.024
5	2014	1.756	1.594	449	426	559	660	128.322	123.674	251.996
6	2015	1.727	1.567	332	328	2.279	339	130.713	125.857	256.570
7	2016	1.877	1.862	336	335	2.050	328	132.924	128.436	261.360
8	2017	1.794	1.769	315	349	2.268	335	135.332	130.860	266.192

Sumber. Data Hasil Analisis 2019

Table 3. Tabel Hasil Presentase

Tahun	Kelahiran		Kematian		Transmigrasi		Jumlah Penduduk		
	laki-laki	perempuan	laki-laki	perempuan	Masuk	Keluar	laki-laki	perempuan	total
2009	374	337	365	347	1332	1471	110740	106263	217003
2010	387	348	377	359	8841	1521	114472	109852	224324
2011	403	362	393	372	10602	1582	119294	114051	233345
2012	406	378	397	389	7901	1624	120356	119267	239623
2013	412	400	402	412	10081	1681	121985	126039	248024
2014	1756	1594	449	426	559	660	128322	123674	251996
2015	1727	1567	501	441	7720	672	130713	125857	256570
2016	1756	1567	510	450	7827	685	132924	128436	261360
2017	1788	1597	519	458	7893	697	135332	130860	266192

Sumber : Hasil Analisis 2019

Setelah dihitung menggunakan program aplikasi matlab hasilnya masih divergen, sehingga metode Jacobian tidak bisa digunakan untuk proyeksi jumlah penduduk di Kecamatan Baleendah.

Tabel 4. Data Hasil Observasi

Tahun	Jumlah Penduduk		
	Laki-laki	Perempuan	Total
2009	110.740	106.263	217.003
2010	114.472	109.852	224.324
2011	119.294	114.051	233.345
2012	120.356	119.267	239.623
2013	121.985	126.039	248.024
2014	128.322	123.674	251.996
2015	130.713	125.857	256.570
2016	132.924	128.436	261.360
2017	135.332	130.860	266.192

Tabel 4 merupakan tabel data hasil observasi, berdasarkan hasil observasi yang dilakukan di kantor BPS kabupaten Bandung, hasilnya dapat dilihat pada tabel 5, bahwa jumlah penduduk di kecamatan Baleendah dari tahun ke tahun terus mengalami peningkatan.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan metode Euler, diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 5. Data hasil prediksi

Tahun	Jumlah penduduk		
	Laki-Laki	Perempuan	Total
2009	111.847	107.326	219.173
2010	112.988	108.421	221.411
2011	115.339	110.681	226.023
2012	118.969	114.174	233.152
2013	123.955	118.974	242.942
2014	130.371	125.158	255.541
2015	138.297	132.804	271.103
2016	147.815	141.993	289.782
2017	159.009	152.809	311.737

Tabel 5 merupakan tabel data hasil prediksi menggunakan metode Euler dengan pendekatan metode logistik. Langkah pertamanya dengan cara mencari nilai K terlebih dahulu, dan diperoleh hasil $K = 822489$, dimana nilai K ini adalah nilai maksimum jumlah penduduk di Kecamatan Baleendah. Metode logistik yang digunakan adalah metode dengan hasil penurunan dan diperoleh rumus umum sebagai berikut:

$$P = \frac{K}{e^{-rt} \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) + 1}$$

Dalam proses perhitungannya metode logistik yang telah diturunkan tersebut kemudian dimasukkan kedalam metode Euler untuk perhitungan menggunakan proses iterasi. Adapun rumusnya adalah sebagai berikut:

$$P_{i+1} = P_i + \Delta t \cdot \frac{K}{e^{-rt} \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) + 1}$$

Tabel 6. Perbandingan data observasi dan data prediksi (laki-laki)

Tahun	Data Observasi	Data Prediksi
	laki-laki	Laki-Laki
2009	110.740	111.847
2010	114.472	112.988
2011	119.294	115.339
2012	120.356	118.969
2013	121.985	123.955
2014	128.322	130.371
2015	130.713	138.297
2016	132.924	147.815
Tahun	Data Observasi	Data Prediksi
	laki-laki	Laki-Laki
2017	135.332	159.009

Dari Tabel 6 di atas setelah dihitung didapatkan MAPE *In Sample* sebesar 5% dan MAPE *Out Sample* sebesar 11%, dengan korelasi terhadap Kecamatan sebesar 1. Berikut ini merupakan perbandingan penyajian jumlah penduduk hasil observasi dengan hasil prediksi dalam bentuk grafik pada Gambar 1.

Tabel 7. Perbandingan data observasi dan data prediksi (Perempuan)

Gambar 1. Data observasi dan data prediksi (laki-laki)		
Tahun	Observasi	Prediksi
2009	106.263	107.326
2010	109.852	108.421
2011	114.051	110.681
2012	119.267	114.174
2013	126.039	118.974
2014	123.674	125.158
2015	125.857	132.804
2016	128.436	141.993
2017	130.860	152.809

Dari Tabel 7 di atas setelah dihitung didapatkan MAPE *In Sample* sebesar 5% dan MAPE *Out Sample* sebesar 11%, dengan korelasi terhadap Kecamatan sebesar 1. Berikut ini merupakakan perbandingan penyajian jumlah penduduk hasil observasi dengan hasil prediksi dalam bentuk grafik pada Gambar 2.

Gambar 2. Data observasi dan data prediksi (perempuan)

Tabel 8. Perbandingan data observasi dan data prediksi (total penduduk)

Tahun	Data Hasil Observasi	Data Hasil Prediksi
	Total Penduduk	Total Penduduk
2009	217.003	219.173
2010	224.324	221.411
2011	233.345	226.023
2012	239.623	233.152
2013	248.024	242.942
2014	251.996	255.541
2015	256.570	271.103
2016	261.360	289.782
2017	266.192	311.737

Dari tabel 8 di atas diperoleh MAPE *In Sample* = 4% dan MAPE *Out of Sample* = 11% dengan korelasi terhadap Kecamatan sebesar 1. Berikut ini merupakan perbandingan penyajian jumlah penduduk hasil observasi dengan hasil prediksi dalam bentuk grafik pada Gambar 3.

Tabel 9. Proyeksi Jumlah Penduduk tahun mendatang

Prediksi			
Tahun	Jumlah penduduk		
	Laki-Laki	Perempuan	Total
2018	171.966	165.341	337.128
2019	186.778	179.677	366.121
2020	203.536	195.912	398.882
2021	222.337	214.141	435.580
2022	243.279	234.464	476.385
2023	266.463	256.981	521.471
2024	291.995	281.799	571.011
2025	319.981	309.025	625.181
2026	350.531	338.771	684.158
2027	383.758	371.149	748.118
2028	419.778	406.277	817.239
2029	458.709	444.275	891.698
2030	500.671	485.265	971.672

Dari Tabel 9 di atas dapat dilihat bahwa proyeksi penduduk hingga tahun 2030. Jumlah penduduk laki-laki diperkirakan berjumlah 500.671 orang, jumlah penduduk perempuan diperkirakan berjumlah 485.265 orang, dan jumlah total penduduk dikecamatan Baleendah berjumlah 971.672 orang.

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dan perhitungan yang telah dilakukan pada bab-bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode Jacobian tidak dapat digunakan dalam proyeksi jumlah penduduk di kecamatan Baleendah, karena data yang digunakan kurang efektif, sehingga menyebabkan data yang tidak dominan diagonal dan hasil perhitungannya menjadi divergen.
2. Hasil perhitungan menggunakan metode Euler memiliki MAPE yang cukup kecil, karena nilai MAPEnya masih kurang dari 15%. Untuk prediksi jumlah penduduk laki-laki memiliki MAPE *In Sample* sebesar 3% dan MAPE *Out Sample* sebesar 12%, untuk prediksi jumlah penduduk perempuan memiliki MAPE *In Sample* sebesar 5% dan MAPE *Out Sample* sebesar 11%, untuk prediksi jumlah penduduk total memiliki MAPE *In Sample* sebesar 4% dan MAPE *Out Sample* sebesar 11%. Dengan demikian metode Euler dapat digunakan untuk prediksi jumlah penduduk di kecamatan Baleendah.
3. Hasil perhitungan metode Euler dalam proyeksi jumlah penduduk hingga tahun 2030 memperkirakan bahwa jumlah penduduk laki-laki berjumlah 500.671 orang, jumlah penduduk perempuan diperkirakan berjumlah 485.265 orang, dan jumlah total penduduk di kecamatan Baleendah berjumlah 971.672 orang.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan jurnal ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan dan kerjasama dari berbagai pihak. Untuk itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada rekan-rekan yang telah membantu dalam penulisan jurnal ini dan penulis tidak lupa mengucapkan terimakasih kepada Pak Fadli Azis, M.Mat selaku pengelola Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan (JRMST) yang telah memberikan kesempatan untuk bisa mempublikasikan artikel penelitian di JRMST ini.

REFERENSI

- [1] S. Widowati, *Pemodelan Matematika*, Semarang; Universitas Diponegoro, 2007.
- [2] A. Ekawati, "Model Non Linear Penyakit Diabetes," *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, vol. 5, No. 1, Juni 2011.
- [3] N.R Ningtyas., I Nyoman W, Ni Made A. "Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Non Linear Menggunakan Metode Newton-Raphson dan Metode jacobian." *E-Jurnal Matematika*, vol. 2, no. 2, Mei, 2013.
- [4] B. Triatmodjo, *Metode Numerik*, Yogyakarta: Beta Offset, 2002.
- [5] M. Subandar, *Analisis Model Ulat Cemara Dengan Metode Euler*, *Skripsi*, Malang : Universitas Islam Negeri, Maulana Malik Ibrahim, 2013.
- [6] A. Wahyulah, *Model Logistik Dengan Penundaan Pada Spesies Tunggal*, *Skripsi*, Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2009.
- [7] A. Prastyoko, *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik Edisi Kedua*, Surabaya: Guna Widya, 2003.