

Proses *Constant Elasticity of Variance* (CEV) untuk Menentukan Nilai Opsi Eropa

Wulan Nurul Kamilah¹ dan Fadli Azis²

^{1,2}Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Bale Bandung, Bandung, Indonesia

wulannurulk@unibba.ac.id

Abstrak. Berdasarkan hasil empirik para peneliti sebelumnya, menemukan bahwa hubungan antara perubahan harga saham dan perubahan volatilitas berkorelasi negatif. *Constant Elasticity of Variance* (CEV), yang dikembangkan oleh Cox, adalah salah satu model yang dapat menggambarkan hubungan tersebut. Pada penelitian ini penulis akan membandingkan nilai opsi Eropa standar dalam proses CEV yang dikembangkan oleh Cox dengan nilai opsi Eropa menggunakan formula Black-Scholes.

Kata kunci: *Constant Elasticity of Variance* (CEV), Opsi Eropa Standar, formula Black-Scholes.

1. Pendahuluan

Dua jenis kontrak opsi yang sering dijumpai adalah opsi *call* dan opsi *put*. Sebuah opsi *call* memberikan hak, bukan kewajiban kepada *holder* untuk membeli suatu aset dari *writer* dengan harga tertentu (*strike price*, *exercise price*) dan pada waktu yang telah ditentukan di masa datang (*expiry date*). Sedangkan sebuah opsi *put* memberikan hak, bukan kewajiban kepada *holder* untuk menjual suatu aset kepada *writer* dengan harga tertentu (*strike price*, *exercise price*) dan pada waktu yang telah ditentukan di masa datang (*expiry date*). *Writer* merupakan pihak yang menerbitkan atau mengeluarkan opsi, sedangkan *holder* adalah pihak pemegang atau pembeli opsi.

Opsi dibedakan menjadi opsi standar dan opsi non-standar. Opsi standar lebih dikenal sebagai opsi *vanilla*. Dua opsi yang terkenal dari opsi ini adalah opsi Eropa dan opsi Amerika. Perbedaan kedua opsi ini adalah waktu pelaksanaan haknya. Opsi Eropa memperbolehkan seorang *holder* untuk melaksanakan haknya hanya pada saat waktu jatuh tempo, sedangkan opsi Amerika dapat melaksanakan haknya pada setiap saat antara saat pembelian hingga jatuh tempo. Opsi non-standar lebih dikenal sebagai opsi *exotic*. Nilai opsi *exotic* sangat bergantung pada perjalanan harga saham sampai dengan jatuh tempo (*path-dependent options*).

Banyak hasil penelitian empirik yang menemukan bukti bahwa adanya perubahan volatilitas dari harga saham, sehingga asumsi bahwa harga saham mengikuti gerak Brown geometrik bukan lagi menjadi pilihan terbaik untuk mengaproksimasi harga saham. Bukti empirik mendukung bahwa volatilitas berubah seiring dengan harga saham. Schmalense dan Trippi [1], menguji lebih dari satu tahun data mingguan pada enam saham, menemukan suatu relasi negatif antara perubahan harga saham dan perubahan pada *implied* volatilitas. Black [1], menggunakan lebih dari sepuluh tahun data pada tiga puluh saham, menemukan bahwa proporsi kenaikan (penurunan) pada harga saham secara umum berasosiasi dengan bertambah besarnya proporsi penurunan (kenaikan) pada standar deviasi.

Salah satu alternatif untuk mengatasi permasalahan di atas adalah dengan model difusi *constant elasticity of variance* (CEV) yang pertama kali dikembangkan oleh Cox (1975). Keuntungan utama dari model ini adalah bahwa volatilitas dari harga saham tidak konstan tetapi suatu fungsi dari harga saham. Schroder [1] menyatakan bahwa Beckers dalam penelitiannya menyimpulkan, proses CEV dapat menggambarkan dengan lebih baik keadaan harga pasar sebenarnya daripada model lognormal. Choi dan Longstaff [2] menemukan bukti bahwa volatilitas *seasonal* dari kacang kedelai di masa yang akan datang dapat digambarkan dengan baik oleh proses CEV.

2. Proses *Constant Elasticity of Variance* (CEV)

Adanya penelitian empirik mengenai harga opsi dan penomena seperti *volatility smile*, menjadi salah satu penyebab para peneliti untuk mengembangkan suatu model penentuan nilai opsi yang meliputi volatilitas yang tidak konstan. Fischer Black [3] dalam penelitiannya menemukan bahwa volatilitas cenderung meningkat ketika harga saham turun. Pada umumnya, saat harga saham turun, *debt to equity ratio* meningkat, begitu juga dengan volatilitasnya. Sebagai respon hasil observasi dari suatu hubungan korelasi negatif antara harga saham dan nilai volatilitas, yang didokumentasikan oleh Black tersebut, maka dikembangkanlah model *Constant Elasticity of variance* (CEV). Cox [4] mengatakan bahwa model CEV ini adalah model yang paling sederhana untuk menggambarkan hubungan tersebut [5].

Asumsikan ada hubungan linear antara $\ln(\text{VarRet})$ dengan $\ln(\text{Price})$, maka akan selalu diperoleh kemiringan garis yang negatif dan nilainya di setiap titik pada garis regresi tersebut selalu konstan, atau dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{kemiringan} = \frac{d \ln(\text{VarRet})}{d \ln(\text{Price})} = \frac{d \text{VarRet}}{\text{VarRet}} \bigg/ \frac{d \text{Price}}{\text{Price}} \quad (1)$$

Persamaan kemiringan pada persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai ukuran elastisitas variansi *return* harga saham terhadap harga saham. Hal ini berarti elastisitas variansi *return* harga saham terhadap harga saham bernilai konstan. Inilah mengapa model ini dinamakan CEV. Selanjutnya asumsikan bahwa

$$\ln \text{Var} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) = \gamma \ln S_t + C \quad \gamma < 0$$

Pilih $C = \ln \delta^2$, δ positif konstan, maka $\text{Std} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) = \delta S_t^{\frac{\gamma}{2}}$. Sehingga diperoleh model *return* harga saham sebagai berikut

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \delta S_t^{\frac{\gamma}{2}} dB_t \quad (2)$$

dan model harga saham sebagai berikut.

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t^{\frac{\gamma}{2}+1} dB_t \quad (3)$$

Agar lebih sederhana, pilih $\gamma = \beta - 2$, sehingga diperoleh Model CEV yang dikembangkan oleh Cox dengan asumsi bahwa harga saham mengikuti PDS:

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dB_t \quad t > 0, \beta < 2 \quad (4)$$

dimana S_t adalah harga saham pada saat t , μS dan $\delta S_t^{\frac{\beta}{2}}$ masing-masing adalah koefisien *drift* dan volatilitas harga saham, serta B_t adalah gerak Brown. μ, δ, β konstan, δ adalah koefisien volatilitas, dan β adalah *elasticity of variance*. Jika $\beta = 2$, maka harga saham berdistribusi lognormal dan volatilitas konstan, seperti yang di asumsikan pada model Black-Scholes.

Berdasarkan persamaan (4), variansi *return* harga saham, pada saat t adalah

$$\text{Var}\left(\frac{dS_t}{S_t}\bigg|_{S_t}\right) = \delta^2 S_t^{\beta-2} \quad (5)$$

3. Menentukan Nilai Opsi

Jenis opsi yang dibahas dalam penelitian ini adalah opsi Eropa, dengan menggunakan dua model, yaitu model Black-Scholes dan model CEV.

3.1. Model Black-Scholes

Rumusan eksak untuk menentukan nilai opsi Eropa dalam model Black-Scholes pertama kali diturunkan oleh Fisher Black dan Myron S. Scholes [6]. Misalkan harga saham S_t adalah solusi dari PDS berikut.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (6)$$

dimana μ dan σ konstan, dan dB_t adalah gerak Brown, maka, nilai opsi *call* pada saat t dengan harga saham S_t memenuhi PDP,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0 \quad (7)$$

dengan $C_T = \max\{(S_T - K), 0\}$ dan r adalah *continuously compounding risk-free interest rate*. Solusi dari PDP Black-Scholes di atas adalah,

$$C_t = S N(d_1) - K e^{r(T-t)} N(d_2) \quad (8)$$

$$\text{dengan } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ dan } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

3.2. Model CEV

Rumusan eksak untuk menentukan nilai opsi dalam proses CEV telah diturunkan oleh John Cox [4]. Model CEV dalam *risk-neutral world* mengikuti PDS berikut,

$$dS_t = r S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dB_t \quad (9)$$

untuk menentukan fungsi densitas yang dapat kita gunakan untuk melihat sifat dari *future share price* $S_T = s$ dengan diberikan $S_t = s_t$, yaitu $f_{S_T|S_t}(s, \tau)$, akan diselesaikan persamaan Kolmogorov *forward* sebagai berikut,

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{\delta^2 s_t^{\beta} f\} - \frac{\partial}{\partial s} \{r s_t f\} \quad (10)$$

Selanjutnya akan digunakan Lemma Feller, untuk menentukan solusi dari PDP di atas. Namun proses S_t akan ditransformasi terlebih dahulu untuk memperoleh PDP yang diperlukan. Transformasi yang dibuat Cox dalam Randal [4] adalah $Y = Y(S, t) = S^{2-\beta}$, dengan $\frac{\partial Y}{\partial S} = (2 - \beta)S^{1-\beta}$, $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = (2 - \beta)(1 - \beta)S^{-\beta}$, diperoleh

$$dY = \left(r(2 - \beta)Y + \frac{1}{2}\delta^2(\beta - 1)(\beta - 2) \right) dt + \delta(2 - \beta)Y^{\frac{1}{2}} dB_t \quad (11)$$

Sehingga proses- Y memiliki mean $r(2 - \beta)Y + \frac{1}{2}\delta^2(\beta - 1)(\beta - 2)$ dan variansi $\delta^2(2 - \beta)^2Y$. Fungsi $f = f_{Y_T|Y_t}(y, \tau)$, memenuhi persamaan *forward* Kolmogorov sehingga,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} (\delta^2(2 - \beta)Yf) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\left[r(2 - \beta)Y + \frac{1}{2}\delta^2(\beta - 1)(\beta - 2) \right] f \right) \quad (12)$$

Selanjutnya akan digunakan Lemma Feller, untuk menentukan solusi dari PDP di atas,

Lema 3.1 Misal $f_{Y_T|Y_t}(y, t)$ adalah p.d.f untuk Y_T kondisional pada Y_t . Bentuk eksplisit dari solusi untuk persamaan parabolic bentuk $u_t = (axu)_{xx} - ((bx + h)u)_x$ diberikan oleh

$$f_{Y_T|Y_t}(y, t) = \frac{b}{a(e^{b\tau} - 1)} \left(\frac{e^{-b\tau}Y_T}{Y_t} \right)^{\frac{h-a}{2a}} \exp \left(\frac{-b(Y_T + Y_t e^{b\tau})}{a(e^{b\tau} - 1)} \right) \times I_{1-\frac{h}{a}} \left(\frac{2b(e^{-b\tau}Y_T Y_t)^{\frac{1}{2}}}{a(1 - e^{-b\tau})} \right)$$

Selanjutnya gunakan Lemma 3.1 di atas dengan $a = \frac{1}{2}\delta^2(2 - \beta)^2$, $b = r(2 - \beta)$, $h = \frac{1}{2}\delta^2(\beta - 2)(1 - \beta)$, $Y_T = S_T^{2-\beta}$, dan $Y_t = S_t^{2-\beta}$, sehingga diperoleh fungsi densitas,

$$f_{S_T|S_t}(s, \tau) = (2 - \beta)k^{\frac{1}{2-\beta}}(xz^{1-\beta})^{\frac{1}{2} \frac{1}{2-\beta}} e^{-x-z} I_{\frac{1}{2-\beta}} \left(2(xz)^{\frac{1}{2}} \right), \beta < 2 \quad (13)$$

dimana $k = \frac{2r}{\delta^2(2-\beta)(e^{r(2-\beta)\tau}-1)}$, $x = kS_t^{2-\beta}e^{r(2-\beta)\tau}$, $z = kS_T^{2-\beta}$, dan $I_\nu(z)$ adalah *modified Bessel function*. Abramowitz dan Stegun [7], menjelaskan *modified Bessel function*

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z \right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2 \right)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}$$

sehingga fungsi densitas pada persamaan (13) menjadi,

$$f_{S_T|S_t}(s, \tau) = (2 - \beta)k^{\frac{1}{2-\beta}} e^{-x-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{2-\beta}} z^{n+\frac{1-\beta}{2-\beta}}}{n! \Gamma\left(1 + n + \frac{1}{2-\beta}\right)} \quad (14)$$

Cox memperoleh rumusan untuk menentukan nilai Opsi *call* Eropa sebagai berikut,

$$C_t = S_t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^n G\left(kK^{2-\beta}, n+1 + \frac{1}{(2-\beta)}\right)}{\Gamma(n+1)} - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{\frac{n+1}{(2-\beta)}} G\left(kK^{2-\beta}, n+1\right)}{\Gamma\left(n+1 + \frac{1}{(2-\beta)}\right)} \quad (15)$$

dimana $G(m, v) = (\Gamma(m))^{-1} \int_v^\infty e^{-u} u^{m-1} du$ adalah fungsi *survival* gamma.

Sementara itu, untuk memperoleh nilai opsi *put* Eropa, gunakan hubungan *put-call parity*, sebagai berikut,

$$P = C_t + Ke^{-rT} - S_t \quad (16)$$

Schroder [1] menurunkan rumusan nilai opsi *call* dalam proses CEV pada persamaan (15) di atas menjadi lebih sederhana lagi, sehingga lebih mudah untuk dihitung. Schroder menuliskan rumusan tersebut dalam bentuk fungsi distribusi *non-central chi-squared*, yaitu

$$C_t = S_t Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - Ke^{-rT} \left(1 - Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right)$$

untuk rumusan rumusan nilai opsi *call* dalam proses CEV, dengan $k = \frac{2}{r} \delta^2 (2-\beta) (e^{r(2-\beta)\tau} - 1)$, $x = kS_t^{2-\beta} e^{r(2-\beta)\tau}$, $y = kK^{2-\beta}$, dan $Q(x; v, \lambda)$ adalah fungsi *survival non-central chi-squared* dengan derajat kebebasan v , dan parameter *non-central* λ .

3.3. Hasil Simulasi

Berikut adalah contoh kasus menentukan nilai opsi *call* dan *put* Eropa dengan model Black-Scholes dan CEV. Misalkan $S_0 = 50$, $r = 0.06$, $K = 40, 50, 60$, dan nilai β yang berubah-ubah, diperoleh

Tabel 1 Nilai opsi *call* Eropa dengan model CEV dan model B-S ($S_0 = 50$, $r = 0.06$, $\tau = \frac{52}{252}$)

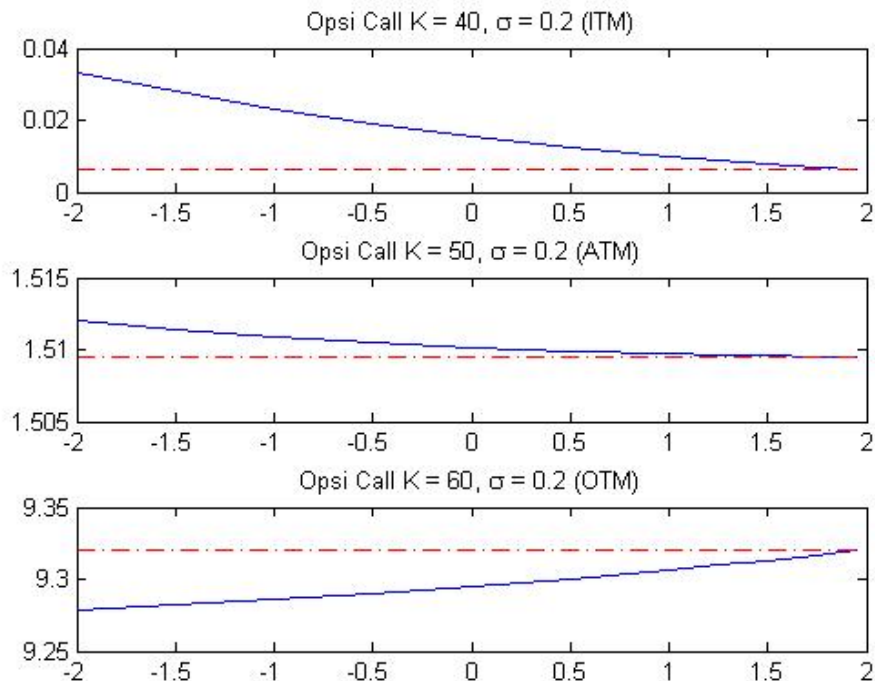
K	$\sigma = 0.2$			$\sigma = 0.3$		
	40	50	60	40	50	60
$\beta = -2.00$	10.5256	2.1273	0.0172	11.2719	3.9337	0.5385
$\beta = -1.50$	10.5201	2.1267	0.0205	11.2077	3.9287	0.5799
$\beta = -1.00$	10.5153	2.1262	0.0243	11.1478	3.9245	0.6232
$\beta = -0.50$	10.5111	2.1257	0.0285	11.0918	3.9209	0.6686
$\beta = 0.00$	10.5076	2.1254	0.0334	11.0395	3.9181	0.7161
$\beta = 0.50$	10.5046	2.1251	0.0388	10.9905	3.9159	0.7657
$\beta = 1.00$	10.5021	2.1249	0.0448	10.9446	3.9144	0.8176
$\beta = 1.25$	10.5010	2.1248	0.0481	10.9229	3.9138	0.8444
$\beta = 1.50$	10.5000	2.1248	0.0515	10.9018	3.9134	0.8718
$\beta = 1.75$	10.4991	2.1248	0.0551	10.8814	3.9132	0.9226
$\beta = 1.95$	10.4984	2.1248	0.0582	10.8657	3.9131	0.9226
$\beta = -1.50$	10.5256	2.1273	0.0172	11.2719	3.9337	0.5385
B-S	10.4982	2.1248	0.0589	10.8618	3.9131	0.9281

Tabel 2 Nilai opsi *put* Eropa dengan model CEV dan model B-S ($S_0 = 50$, $r = 0.06$, $\tau = \frac{52}{252}$)

K	$\sigma = 0.2$			$\sigma = 0.3$		
	40	50	60	40	50	60
$\beta = -2.00$	0.0334	1.5120	9.2789	0.7797	3.3185	9.8002
$\beta = -1.50$	0.0279	1.5114	9.2822	0.7155	3.3135	9.8416
$\beta = -1.00$	0.0231	1.5109	9.2860	0.6556	3.3092	9.8849
$\beta = -0.50$	0.0189	1.5105	9.2903	0.5996	3.3057	9.9303
$\beta = 0.00$	0.0154	1.5101	9.2951	0.5473	3.3029	9.9778
$\beta = 0.50$	0.0124	1.5099	9.3005	0.4983	3.3007	10.0275
$\beta = 1.00$	0.0099	1.5097	9.3065	0.4525	3.2991	10.0793
$\beta = 1.25$	0.0088	1.5096	9.3098	0.4307	3.2986	10.1061
$\beta = 1.50$	0.0078	1.5096	9.3132	0.4096	3.2982	10.1335
$\beta = 1.75$	0.0069	1.5095	9.3169	0.3893	3.2980	10.1615

Tabel 3 (Lanjutan)

K	$\sigma = 0.2$			$\sigma = 0.3$		
	40	50	60	40	50	60
$\beta = 1.95$	0.0061	1.5095	9.3199	0.3735	3.2979	10.1843
$\beta = -1.50$	0.0062	1.5095	9.3207	0.3696	3.2979	10.1901
B-S	0.0334	1.5120	9.2789	0.7797	3.3185	9.8002

**Gambar 1** Nilai opsi *call* terhadap β dengan model CEV dan Black-Scholes

Gambar 1 adalah plot nilai opsi *call* untuk $\sigma = 0.2$ dengan $K = 40, 50, 60$, $\tau = \frac{52}{252}$, $S_0 = 50$, $r = 0.06$ untuk model CEV dan Black-Scholes. Berdasarkan Tabel 1 dan Gambar 1, terlihat bahwa jika β mendekati 2, maka nilai opsi pada model CEV konvergen ke nilai opsi pada model Black-Scholes, bahkan pada kasus *at the money* nilai opsi dengan model CEV mencapai nilai yang sama dengan nilai opsi pada model Black-Scholes.

4. Kesimpulan

Pergerakan harga saham mengikuti gerak Brown geometric bukan lagi menjadi pilihan terbaik untuk mengaproksimasi harga saham. Hal ini berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya yang menemukan bahwa volatilitas berubah seiring dengan harga saham. Oleh karena itu, banyak peneliti mengusulkan berbagai alternatif terbaik untuk mengamati pergerakan harga saham, salah satunya model difusi *constant elasticity of variance* (CEV) yang pertama kali dikembangkan oleh Cox (1975). Berdasarkan hasil simulasi nilai opsi pada model CEV konvergen ke nilai opsi pada model Black-Scholes. Dengan demikian model CEV ini dapat juga digunakan untuk menghitung opsi lainnya seperti opsi eksotik untuk nilai opsi yang lebih akurat.

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Fadli Azis, S.Mat., M.Mat. dan Rekan-rekan pengelola Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan (JMRST), yang telah memberikan kesempatan untuk mempublikasikan hasil penelitian penulis di JRMST volume pertama ini.

Referensi

- [1] M. Schroder, "Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula," *J. Finance*, vol. 44, no. 1, pp. 211–219, 2009.
- [2] J. W. Choi and F. A. Longstaff, "No TiPricing Options on Agricultural Futures: An Application of the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model," *J. Futur. Mark.*, vol. 5, p. 247, 1985.
- [3] F. Black, "Studies of Stock Price Volatility Change," in *Proceedings of the meetings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Division*, 1976, pp. 177–181.
- [4] J. Randal, "The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model," Victoria University of Wellington, 1998.
- [5] W. N. Kamilah, "Penentuan Nilai Opsi Lookback dalam Proses Constant Elasticity of Variance (CEV) dengan Metode Binomial," Institut Teknologi Bandung, 2014.
- [6] D. J. Higham, *An introduction to financial option valuation*. Cambridge University Press, 2001.
- [7] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, Inc., 1970.