Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan
Volume 1, Nomor 1, Desember 2021, 12-18
ISSN: 2809-4581

Model Persediaan Barang Deteriorasi dengan *Exponential Declining Demand, Time-Varying Holding Cost* dan *Return*

Fadli Azis[1], Dadang Ruhiat[2], dan Wulan Nurul Kamilah[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Bale Bandung, Bandung, Indonesia
fadliazis@unibba.ac.id

Abstrak. Pada artikel ini diusulkan model matematika EOQ (*Economic Order Quantity*) untuk barang yang mengalami deteriorasi. Model ini dikembangkan dengan mempertimbangkan permintaan yang menurun secara eksponensial (*Exponential Declining Demand*), tingkat deterioirasi yang konstan, memungkinkan *shortage*, dan terjadi return. Biaya penyimpanan, biaya deteriorasi, biaya *shortage*, dan biaya return diperhitungkan dalam manajemen persediaan. Tujuan dari model ini adalah untuk meminimumkan total biaya persediaan dengan menentukan waktu return optimal dan jumlah pesanan optimal. Contoh numerik disajikan untuk menggambarkan model dan analisis sensitivitas dari berbagai parameter dilakukan.

Kata kunci: Persediaan, deteriorasi, *shortage*, *return*.

1. Pendahuluan

Salah satu faktor penting yang perlu dikendalikan oleh suatu perusahaan adalah persediaan. Pengendalian persediaan bertujuan agar kegiatan operasional perusahaan berjalan dengan baik. Pengadaan persediaan yang terlalu banyak akan menyebabkan perusahaan mengeluarkan biaya yang besar untuk menyimpan barang tersebut, seperti biaya pemeliharaan, biaya sewa gudang, atau biaya asuransi. Sebaliknya pengadaan persediaan yang terlalu sedikit akan menimbulkan kerugian bagi perusahaan, seperti meningkatnya biaya pemesanan, produksi terhenti karena kekurangan bahan baku atau kurangnya produk yang akan dijual sehingga berpotensi kehilangan pendapatan, dan dampak lebih lanjut adalah hilangnya kepercayaan konsumen akibat tidak terpenuhinya permintaan konsumen. Oleh karena itu, pengaturan mengenai persediaan bagi perusahaan menjadi sangat penting.

Mengingat sangat pentingnya pengendalian persediaan, maka telah banyak para ilmuan yang mengembangkan suatu model persediaan dengan tujuan untuk memudahkan perusahaan dalam mengambil keputusan terhadap jumlah persediaan. Salah satu model persediaan yang dapat digunakan perusahaan adalah model persediaan EOQ [1]. Bagi perusahaan atau industri yang memproduksi barang yang dipengaruhi oleh faktor deteriorasi (penurunan nilai kualitas setelah waktu tertentu) seperti perusahaan/industri makanan dan bahan kimia, faktor deteriorasi merupakan faktor penting yang perlu diperhatikan untuk mengambil kebijakan dalam menahan persediaan, karena akan mempengaruhi pencapaian persediaan yang optimal. Oleh karena itu, faktor deteriorasi tidak dapat dilepaskan dalam perencanaan model persediaan [2].

Pada tahun 1963, Ghare dan Schrader [3] mengembangkan model EOQ klasik dengan menambahkan tingkat penurunan persediaan dan membuat model matematika untuk barang-barang yang mengalami deteriorasi selama proses persedian, Ghare dan Schrader mengembangkan model persediaan dengan tingkat deteriorasi konstan dan tingkat permintaan konstan. Kemudian pada tahun 2001, Goyal dan Giri [4] memberikan tinjauan rinci tentang deteriorasi item dalam persediaan. Goyal dan Giri memberikan asumsi bahwa tingkat permintaan konstan tidak selalu berlaku untuk banyak item persediaan (misalnya: barang elektronik, pakaian, dll.) karena barang-barang tersebut mengalami fluktuasi tingkat permintaan. Ouyang dan Cheng [5] mengembangkan model persediaan untuk menurunkan item dengan permintaan eksponensial yang menurun dan penumpukan sebagian. Kemudian model ini dikembangkan oleh Mishra *et.al* [6] dengan tingkat permintaan bergantung waktu dan biaya penyimpanan yang bergantung waktu. Shing dan Pattnayak [7], Amutha dan Chandrasekaran [8], dan Bhanu *et.al* [9] juga mempelajari model persediaan untuk item yang

Diterima 12 November 2021; Disetujui untuk publikasi 24 Desember 2021,
Diterbitkan oleh Program Studi Matematika UNIBBA.

mengalami deteriorasi. Pada dasarnya, dalam model persediaan, tingkat permintaan dan biaya penyimpanan dianggap konstan. Tetapi dalam kenyataannya, kadang-kadang dapat diamati bahwa biaya penyimpanan dan tingkat permintaan bergantung pada waktu.

Penelitian-penelitian mengenai model persediaan dengan faktor deteriorasi terus dikembangkan. Model persedian deteriorasi dikembangkan dengan mempertimbangkan faktor-faktor yang mempengaruhi pengelolaan persediaan, seperti faktor shortage dan return. Pada tahun 2017, Lesmono *et,al* [10] mengembangkan model persediaan dengan faktor deteriorasi, diskon, return, permintaan yang bergantung stok dan biaya penyimpanan per unit barng konstan. Fadli *et,al* [11] mengembangkan model persediaan untuk barang yang mengalami deteriorasi dengan tingkat permintaan yang menurun secara eksponential dan biaya penyimpanan konstan.

Dalam makalah ini, model EOQ akan dikembangkan untuk barang yang memgalami deteriorasi dengan fungsi permintaan menurun secara eksponensial, biaya penyimpanan bergantung waktu, mempertimbangkan shortage dan terjadinya return. Masalah utama adalah menentukan total biaya minimum dan menentukan jumlah pesanan yang optimal dengan menentukan waktu terjadinya return. Sebuah contoh numerik diberikan untuk menggambarkan model kerja. Selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas untuk melihat pengaruh perubahan parameter terhadap solusi optimal.

2. Metode Penelitian

Model matematika dalam makalah ini dikembangkan dengan memberikan notasi dan asumsi sebagai berikut:

2.1. *Notasi*

$I(t)$	: Tingkat persediaan pada saat *t*
θ	: Laju deteriorasi
$D(t)$	:laju permintaan $D(t) = \begin{cases} Ae^{-\lambda t} & ; 0 \le t \le t_r \\ \delta & ; t_r \le t \le T \end{cases}$, dengan $A > 0$ adalah permintaan awal dan $\lambda\,(0 < \lambda < \theta)$ adalah konstanta yang mengatur laju penurunan permintaan
HC	: Biaya penyimpanan dengan fungsi linear $H(t) = a + bt;\ a > 0, b > 0$
P	: Biaya pesan untuk setiap pemesanan
C_r	: Biaya satu kali return
RC	: Biaya return per siklus
P_r	: Biaya sekali return
C_s	: Biaya shortage per unit
SC	: Biaya shortage per siklus
t_r	: Waktu antar pesanan
T	: Panjang setiap siklus pemesanan
W	: Tingkat persediaan maksimum untuk setiap siklus pemesanan
S	: Jumlah maksimum shortage untuk setiap siklus pemesanan
Q	: Jumlah pesanan untuk setiap kali pemesanan

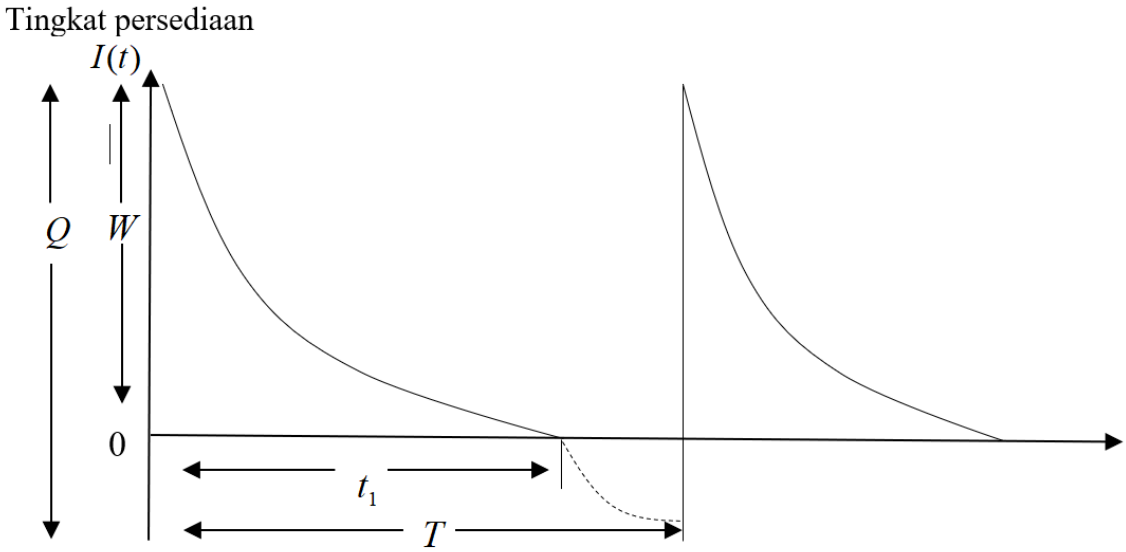
2.2. *Asumsi*

1. Model dikembangkan untuk model persediaan satu barang.
2. Laju deteriorasi $\theta(0 < \theta < 1)$ adalah konstan.
3. Tidak ada perbaikan atau penggantian barang yang rusak selama periode yang ditentukan.
4. Mempertimbangkan terjadinya shortage.
5. Tingkat permintaan diketahui dan menurun secara exponential.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. *Formulasi Model*

Model persediaan ini dikembangkan dengan tujuan untuk menentukan jumlah pemesanan yang optimal dan waktu antar pemesanan sehingga dapat meminimalkan total biaya.



Gambar 1. Tingkat Persediaan

Tingkat persediaan mengalami penurunan sesuai dengan jumlah barang yang diminta pada saat *t*. Pada interval $[0, t_r]$ waktu tingkat persediaan berkurang oleh pengaruh permintaan dan faktor deteriorasi barang dengan laju penurunan dari tingkat permintaan menurun secara eksponensial seperti yang ditunjukan pada Gambar (1). Ketika $t = t_r$, perusahaan akan mengembalikan semua barang yang ada untuk diganti dengan barang baru. Perusahaan tetap menerima permintaan dari konsumen sambil menunggu barang baru datang. Oleh karena itu terjadilah shortage pada interval $[t_r, T]$. Dari kasus ini dapat dibentuk persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta I(t) = -Ae^{-\lambda t}, \qquad 0 \le t \le t_r \tag{1}$$

karena saat $t = t_r$ diketahui bahwa $I(t_r) = 0$, maka solusi dari persamaan (1) diperoleh

$$I(t) = \frac{A}{\theta - \lambda}\left[e^{t_r(\theta-\lambda)-\theta t} - e^{-\lambda t}\right]; \qquad 0 \le t \le t_r \tag{2}$$

untuk jumlah maksimum persediaan yang diperoleh dengan memberikan syarat batas nilai awal $W = I(0)$, maka dari persamaan (2) diperoleh

$$W = I(0) = \frac{A}{\theta - \lambda}\left[e^{t_r(\theta-\lambda)} - 1\right]; \tag{3}$$

kemudian, ditentukan jumlah shortage pada interval $[t_r, T]$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\delta, \qquad t_r \le t \le T \tag{4}$$

dengan syarat batas kondisi $I(t_r) = 0$, maka solusi persamaan (4) diperoleh

$$I(t) = \delta(t_r - t); \qquad t_r \le t \le T \tag{5}$$

kemudian ditentukan jumlah maksimum shortage per siklus sebagai berikut:

$$S = -I(T) = -\delta(t_r - T) = \delta(T - t_r) \tag{6}$$

dari persamaan (3) dan (6), jumlah pesanan per siklus adalah sebagai berikut:

$$Q = W + S = \frac{A}{\theta - \lambda}\left[e^{t_r(\theta-\lambda)} - 1\right] + \delta(T - t_r) \tag{7}$$

Setelah ditentukan formulasi tingkat persediaan untuk setiap kali pemesanan pada interval $[0, t_r]$, tingkat shortage pada interval $[t_r, T]$, jumlah pesanan, jumlah maksimum persediaan , dan jumlah shortage. Selanjutnya akan dirumuskan total biaya selama periode persediaan $[0, T]$. Biaya-biaya tersebut meliputi: biaya pesan, biaya penyimpanan, biaya return, dan biaya shortage.

Biaya penyimpanan per siklus adalah

$$HC = \int_0^{t_r} (a + bt) I(t) dt$$

$$HC = \frac{Ae^{-\lambda t_r}}{\theta\lambda(\theta - \lambda)}\left[(a + bt_r)(\theta - \lambda) + a\left(\lambda e^{\theta t_r} - \theta e^{\lambda t_r}\right) + \frac{b}{\theta\lambda}\left[\left(\theta^2 - \lambda^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\lambda^2 e^{\theta t_r} - \theta^2 e^{\lambda t_r}\right)\right]\right] \tag{8}$$

Biaya shortage per siklus $[t_r, T]$ diperoleh

$$SC = C_s\left[-\int_{t_r}^{T} I(t) dt\right]$$
$$= C_s\left[-\int_{t_r}^{T} \delta(t_r - t) dt\right]$$
$$= C_s\left[\frac{1}{2}\delta\left(T^2 - t_r^{\,2}\right) - \delta t_r(T - t_r)\right] \tag{9}$$

Biaya return

$$RC = P_r + C_s\left[-\int_{t_r}^{T} \delta(t_r - t) dt\right]$$

$$RC = P_r + C_s\left[\frac{1}{2}\delta\left(T^2 - t_r^{\,2}\right) - \delta t_r(T - t_r)\right] \tag{10}$$

Total biaya persediaan per satuan waktu per siklus adalah $TIC \equiv TIC(t_r)$. TIC = biaya pesan (OC) + biaya penyimpanan (HC) + biaya shortage (SC) + biaya return (RC). Jadi, total biaya per satuan waktu adalah

$$TIC = \frac{1}{T}\left\{P + \frac{Ae^{-\lambda t_r}}{\theta\lambda(\theta-\lambda)}\left[(a+bt_r)(\theta-\lambda) + a\left(\lambda e^{\theta t_r} - \theta e^{\lambda t_r}\right) + \frac{b}{\theta\lambda}\left[\left(\theta^2-\lambda^2\right) + \left(\lambda^2 e^{\theta t_r} - \theta^2 e^{\lambda t_r}\right)\right]\right]\right.$$
$$\left. + C_s\left[\frac{1}{2}\delta\left(T^2 - t_r^{\,2}\right) - \delta t_r (T - t_r)\right] + P_r + C_r\left[\frac{1}{2}\delta\left(T^2 - t_r^{\,2}\right) - \delta t_r (T - t_r)\right]\right\} \tag{11}$$

Tujuan dari model ini adalah menentukan nilai $t_r^{\,*}$ optimal untuk meminimumkan total biaya persatuan waktu (TIC). Solusi optimal didapatkan dengan menghitung $\frac{dTIC}{dt_r} = 0$ dan kondisi cukup $\frac{d^2TIC}{\partial t_r^{\,2}} > 0$

$$\frac{dTIC}{dt_r} = -\frac{aAe^{-\lambda t_r}}{\theta T} + \frac{bAe^{-\lambda t_r}}{\theta\lambda T} - \frac{bt_r Ae^{-\lambda t_r}}{\theta T} + \frac{aAe^{(\theta-\lambda)t_r}}{\theta T} - \frac{bAe^{-\lambda t_r}}{\lambda(\theta-\lambda)T} + \frac{\lambda bAe^{-\lambda t_r}}{\theta^2(\theta-\lambda)T}$$
$$+ \frac{bAe^{(\theta-\lambda)t_r}}{\theta^2 T} - C_s\delta + \frac{C_s\delta t_r}{T} - C_r\delta + \frac{C_r\delta t_r}{T} = 0 \tag{12}$$

dan

$$\frac{d^2TIC}{dt_r^{\,2}} = \frac{\lambda aAe^{-\lambda t_r}}{\theta T} - \frac{2bAe^{-\lambda t_r}}{\theta T} + \frac{\lambda bt_r Ae^{-\lambda t_r}}{\theta T} + \frac{(\theta-\lambda)aAe^{(\theta-\lambda)t_r}}{\theta T} + \frac{bAe^{-\lambda t_r}}{(\theta-\lambda)T}$$
$$- \frac{\lambda^2 bAe^{-\lambda t_r}}{\theta^2(\theta-\lambda)T} + \frac{(\theta-\lambda)bAe^{(\theta-\lambda)t_r}}{\theta^2 T} + \frac{C_s\delta}{T} + \frac{C_r\delta}{T} > 0 \tag{13}$$

Kemudian, dengan menggunakan $t_r^{\,*}$ yang memenuhi persamaan (12) dan pertidaksamaan (13) diperoleh tingkat persediaan maksimum yang optimal dan total biaya per unit waktu yang minimum dari persamaan (3) dan (11) yang dinotasikan dengan W^* dan TIC^*. Kemudian jumlah pemesanan optimal dari persamaan (7) dinotasikan dengan Q^*. Selanjutnya, digunakan simulasi numerik untuk menguji model di atas dengan memberikan nilai pada parameter yang ditetapkan.

3.2. *Simulasi Numerik*

Pada bagian ini diberikan contoh numerik untuk memberi gambaran bagaimana model di atas bekerja. Untuk mengilustrasikan model di atas diberikan nilai parameter sebagai berikut :

$A = 1000$, $\lambda = 0.02$, $\theta = 0.08$, $a = 0.5$, $b = 0.2$, $P = 15$, $P_r = 10$, $C_s = 1.3$, $C_r = 1$, $\delta = 150$, $T = 12$.

Dengan mengikuti prosedur penyelesaian sebelumnya, diperoleh nilai optimal untuk $t_r^{\,*} = 3.373413171$, $W^* = 3739.058501$, $Q^* = 5033.046525$, dan $TIC^* = 431233.7382$.

3.3. *Analisis Sensitivitas*

Analisis sensitivitas dilakukan untuk melihat pengaruh perubahan parameter terhadap solusi optimal. Pengujian sensitivitas dilakukan dengan mengubah satu parameter sebesar 25%, 50% (positif dan negatif) dan untuk parameter lainnya dibuat tetap. Analisis sensitivitas dengan parameter yang berbeda ditunjukan pada tabel berikut:

Tabel 1. Analisis sensitivitas untuk parameter λ

Perubahan (%)	t_r^*	Q^*	W^*	TIC^*
+50	3.436814693	5034.251636	3749.773840	330034.226
+25	3.404736908	5033.679064	3744.389600	368187.854
0	3.373413171	5033.046525	3739.058501	431233.738
-25	3.342814887	5032.357689	3733.779922	542273.632
-50	3.312914981	5031.616026	3728.553273	771380.220

Tabel 2. Analisis sensitivitas untuk parameter θ

Perubahan (%)	t_r^*	Q^*	W^*	TIC^*
+50	3.317970796	5237.004941	3934.700560	179903.324
+25	3.317970796	5102.323943	3800.019562	264382.916
0	3.373413171	5033.046525	3739.058501	431233.738
-25	3.430498991	4962.435951	3677.010800	844085.229
-50	3.489267713	4890.509693	3613.899850	2478362.05

Dari Tabel 1 dan Tabel 2 di atas diperoleh informasi dengan poin-poin sebagai berikut :

1. Tabel 1 menunjukan bahwa, ketika parameter λ meningkat, maka t_r^*, Q^*, W^* juga ikut meningkat, sedangkan TIC^* mengalami penurunan. Sebaliknya ketika λ menurun, maka t_r^*, Q^*, W^* mengalami penurunan, sedangkan TIC^* mengalami peningkatan. Dari Tabel 1 terlihat bahwa perubahan parameter λ cukup sensitif terhadap nilai t_r^*, Q^*, W^*, dan TIC^*.
2. Tabel 2 menunjukan bahwa, ketika parameter θ meningkat, maka Q^* dan W^* mengalami peningkatan, sedangkan t_r^* dan TIC^* mengalami penurunan. Sebaliknya ketika θ menurun, maka Q^* dan W^* mengalami penurunan, sedangkan t_r^* dan TIC^* mengalami peningkatan. Dari Tabel 2 terlihat bahwa perubahan parameter θ sensitif terhadap nilai t_r^*, Q^*, W^*, dan terutama nilai TIC^* yang mengalami perubahan signifikan.

4. Kesimpulan

Dalam Model persediaan untuk barang yang mengalami deteriorasi dengan permintaan yang menurun secara eksponensial, biaya penyimpanan yang bergantung waktu dan faktor return. Laju deteriorasi dan laju permintaan sangat mempengaruhi solusi optimal model. Ketika tingkat permintaan (λ) meningkat, maka t_r semakin lama, Q dan W meningkat, dan TIC menurun. Hal ini disebabkan oleh permintaan yang lebih sedikit, menyebabkan return yang lebih lama, Q dan W meningkat, dan TIC yang semakin kecil, karena biaya return dan biaya shortage semakin kecil. Ketika tingkat deteriorasi (θ) meningkat, Q dan W juga meningkat, tetapi t_r dan TIC menurun. Hal ini disebabkan nilai θ yang besar menyebabkan waktu return menjadi lebih singkat sehingga biaya penyimpanan menjadi kecil yang mengakibatkan total biaya menjadi minimum.

5. Rekomendasi

Penelitian lebih lanjut dapat dikembangkan untuk model persediaan dengan multi item dan mempertimbangkan faktor permintaan probabilistik, sehingga lebih mendekati masalah nyata.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua Dewan Redaksi Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan dan semua pihak yang terlibat dalam proses penyusunan paper ini.

Referensi

[1]. Garcia-Laguna, J., San-Jose, L.A., Cardenas-Barron, L.E., dan Sicilia,J,"The Integrality of The Lot Size in The Basic EOQ and EPQ Models : Applications to Other Production-Inventory Models", *Applied Mathematics and Computation*, 216. pp 1660-72, 2010

[2]. Limansyah, T., Lesmono, J.D., dan Loedy, N. *Pengembangan model persediaan dengan deteriorasi, diskon, dan retur.*Bandung : Institute for Research and Community Service at Parahyangan Catholic University.2018.

[3]. Ghare dan Schrader, G. F," A Model for an Exponentially Decaying Inventory", *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 14, 238-243, 1963.

[4]. Goyal dan Giri, B. C," Recent Trends in Modeling of Deteriorating Inventory", *European Journal of Operational Re- search*, Vol. 134, No.1, 1-16, 2001.

[5]. Ouyang, L.Y., Wu, K.S., dan Cheng, M.C, " An Inventory Model for Deteriorating Items With Exponential Declining Demand and Partial Backlogging", *Yugoslav Journal of Operations Research*,Vol. 15, No 2, 277-288, 2005.

[6]. Mishra, V. K., Singh, L. S dan R. Kumar," An Inventory Model for Deteriorating Items with Time-Dependent Demand and Time-Varying Holding Cost under Partial Backlogging", *Journal of Industrial Engineering International*, Vol. 9, No. 4, 1-5, 2013.

[7]. Singh, T., dan Pattnayak, N, "An EOQ Model for Deteriorating Items With Linear Demand, Variable Deterioration and Partial Backlogging", *Journal of Service Science and Management*, Vol. 6, pp. 186-190, 2013.

[8]. Amutha, R., dan Chandrasekaran, E, " An EOQ Model for a Deteriorating Item With Quadratic Demand and Time Depandent Holding Cost", *International Journal of Emerging Science and Engineering*, 5, pp. 5-6, 2013.

[9]. Bhanu, P. D., Trailokyanath, S., dan Hadhibandu, P, " An Inventory Model for Deteriorating Items With Exponential Declining Demand and Time- Vaying Holding Cost", *American Journal of Operations Research*, 4, 1-7, 2014.

[10]. Lesmono, D., Setiawan, S.W., dan Limansyah, T, " A Perishable Inventory Model wit Return", *Paper presented at the 2nd Internatioanl Conference on Mathematics, Science, Education and Technology*, Padang, October 5-6, 2017.

[11]. Fadli, A., Sudradjat., dan Eman, L, " An inventory Model for Deteriorating Items With Exponential Declining Demand and Return", *Jurnal Ilmiah Sains*, Vol. 20, No. 1, 31-36, 2019.