Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan
Volume 6, Nomor 1, Juni 2026, 1-9
ISSN: 2809-4581

Systematic Literature Review: Implementasi Metode *Condensation* pada Matriks *Vandermonde* dan *L-Structured Circulant* melalui Representasi *Toeplitz*

Nessa Hisan Adilah[1, a)], Dini Andiani[2, b)], Fadli Azis[3,c)]
[1, 2,3]Universitas Bale Bandung, Bandung, Indonesia
[a)]nessahisan13@gmail.com

ABSTRAK

Metode *Condensation Dodgson* merupakan salah satu alternatif dalam menghitung determinan matriks persegi melalui reduksi bertahap menggunakan determinan submatriks berukuran 2×2. Penelitian ini menggunakan metode *Systematic Literature Review* untuk menelaah bagaimana implementasi metode *Condensation Dodgson* pada matriks *Vandermonde* dan matriks *L-Structured Circulant*, dan menelaah keterkaitannya dengan representasi *Toeplitz* berdasarkan sumber-sumber seperti artikel atau jurnal ilmiah nasional dan internasional yang relevan. Hasil telaah menunjukkan bahwa metode *Condensation* efektif untuk struktur matriks tertentu, khususnya matriks *Circulant*, namun memiliki keterbatasan ketika terdapat elemen nol pada bagian interior matriks. Matriks *Vandermonde* memiliki determinan berbentuk produk selisih pasangan elemen yang menyebabkan sensitivitas numerik tinggi. Matriks *Circulant* sebagai kasus khusus *Toeplitz* memiliki sifat spektral eksplisit yang mempermudah perhitungan determinan dan invers. Representasi Toeplitz memberikan kerangka umum untuk memahami struktur *Circulant* dan dekomposisi *Vandermonde*. Analisis komparatif menunjukkan bahwa stabilitas numerik lebih terjaga pada struktur *Toeplitz* dan *Circulant* dibandingkan *Vandermonde* dalam konteks komputasi determinan berbasis kondensasi.

Kata kunci: *Dodgson condensation, Vandermonde, Circulant matrix, Toeplitz matrix*

PENDAHULUAN

Dalam penentuan invers, penyelesaian sistem persamaan linear, dan analisis nilai eigen, determinan matriks berperan penting, karena determinan matriks merupakan konsep dasar dalam aljabar linear. Berbagai metode telah dikembangkan untuk menghitung determinan, salah satunya adalah metode *Condensation Dodgson*. Metode *Condensation* menghitung determinan dengan membentuk matriks baru yang elemennya merupakan determinan submatriks 2×2 dari matriks sebelumnya, dan proses ini dilakukan secara iteratif hingga diperoleh satu elemen akhir sebagai determinan (Fitriyani et al., 2018). Fahlevi (2021) telah meneliti bagaimana implementasi metode ini pada matriks *Circulant*, menunjukkan bahwa metode tersebut dapat digunakan secara sistematis untuk struktur matriks berulang. (Seru, 2021). Struktur ini sering digunakan dalam interpolasi polinomial dan teori aproksimasi.

Diterima 11 Mei 2026; Disetujui untuk publikasi 15 Juni 2026,
Diterbitkan oleh Program Studi Matematika UNIBBA.

Namun demikian, matriks *Vandermonde* dikenal memiliki kondisi numerik yang buruk ketika elemen-elemennya saling berdekatan (Cervellino & Ciccariello, 2005). Di sisi lain, matriks *Circulant* pada dasarnya merupakan kasus khusus dari matriks *Toeplitz* di mana setiap garis selanjutnya diperoleh melalui rotasi siklis dari baris pertama (Aliatiningtyas et al., 2022). Struktur ini memungkinkan formulasi eksplisit untuk nilai eigen dan determinan (Siswandi et al., 2023). Lebih jauh, representasi *Toeplitz* memungkinkan analisis determinan dan faktorisasi yang lebih luas (da Fonseca et al., 2025).

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan menelaah implementasi metode condensation pada matriks *Vandermonde* dan *L-Structured Circulant* serta hubungan keduanya melalui struktur *Toeplitz*.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan *Systematic Literature Review* atau SLR. Pendekatan ini dilakukan dengan cara menelaah berbagai penelitian yang telah dipublikasikan sebelumnya dan kemudian menyusun sintesis dari temuan-temuan yang relevan dengan topik yang lebih luas dibahas. Literatur yang digunakan dalam kajian ini diperoleh dari jurnal nasional terakreditasi dan jurnal internasional yang telah melalui proses *peer-review*. Penelusuran artikel dilakukan melalui beberapa basis data ilmiah dengan menggunakan kata kunci seperti *Dodgson Condensation, Vandermonde Matrix, Circulant Matrix,* dan *Toeplitz Matrix.*

Tidak semua artikel yang ditemukan langsung digunakan dalam analisis beberapa kriteria digunakan untuk menyeleksi literatur yang relevan. Artikel yang dipilih merupakan penelitian yang secara langsung membahas perhitungan determinan sifat struktur matriks *Vandermonde*, matriks *Circulant*, maupun matriks *Toeplitz*. Selain itu, penelitian yang menyinggung aspek stabilitas numerik atau efisiensi komputasi juga dipertimbangkan dalam kajian ini.

Setelah proses seleksi dilakukan, setiap artikel dianalisis dengan memperhatikan tujuan penelitian, metode yang digunakan, satu temuan yang utama yang dihasilkan. Informasi tersebut kemudian dibandingkan dan disintesis untuk memperoleh gambaran yang lebih komprehensif mengenai penerapan metode *Condensation* pada berbagai struktur matriks.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Literatur yang ditelaah terdiri atas penelitian dari jurnal nasional serta jurnal internasional yang membahas implementasi metode *Condensation* pada matriks terstruktur, khususnya matriks *Vandermonde* dan *L-Structured Circulant,* serta keterkaitannya dengan *Toeplitz* dalam perhitungan determinan dan efisiensi komputasi.

Ringkasan karakteristik masing-masing penelitian disajikan untuk memberikan gambaran yang luas mengenai fokus kajian, pendekatan metodologis, teknik analisis yang digunakan, serta temuan utama yang relevan dengan topik penelitian ini. Penyajian tersebut dirangkum

dalam Tabel 1 untuk memudahkan identifikasi kontribusi, persamaan, dan perbedaan antar penelitian yang menjadi dasar dalam penyusunan sintesis dan pembahasan lebih lanjut.

Tabel 1. Ringkasan karakteristik jurnal nasional dan jurnal internasional yang membahas implementasi metode *Condensation* pada matriks *Vandermonde* dan *L-Structured Circulant* melalui representasi *Toeplitz*.

No	Penulis dan Tahun	Tujuan Penelitian	Subjek	Fokus Konsep	Metode	Temuan Utama
1.	Fahlevi (2021)	Mengkaji nilai eigen matriks *Circulant* dengan barisan geometri	Matriks *Circulant*	Determinan matriks *Circulant*	Kuantitatif	Metode *Dodgson* dapat menghitung determinan matriks *Circulant* secara sistematis melalui proses kondensasi bertahap.
2.	Seru (2021)	Menghitung invers matriks *Vandermonde* dan aplikasinya dalam prediksi harga saham	Matriks *Vandermonde*	Invers matriks *Vandermonde*	Kuantitatif	Pembagian sintetik mempermudah perhitungan invers *Vandermonde* dan dapat digunakan dalam pemodelan data.
3.	Rahma Et Al. (2019)	Menentukan determinan matriks FLScircr bentuk khusus	Matriks *L-Structured Circulant*	Determinan matriks terstruktur	Kuantitatif	Metode Salihu dapat digunakan untuk memperoleh determinan matriks terstruktur dengan bentuk tertentu.
4.	Aliatiningtyas Et Al. (2022)	Mengkaji nilai eigen matriks *Circulant* dengan barisan geometri	Matriks Circulant	Nilai eigen matriks *Circulant*	Kuantitatif	Nilai eigen matriks *Circulant* dapat

						ditentukan melalui pola barisan geometri.
5.	Siswandi Et Al. (2023)	Menentukan formula eksplisit *eigenvalue*, determinan, dan invers matriks *Circulant*	Matriks *Circulant*	Financial behavior, implusive buying	Kuantitatif	Diperoleh rumus eksplisit yang mempermudah perhitungan sifat-sifat matriks *Circulant*.
6.	Rasmawati Et Al. (2021)	Menentukan bentuk umum determinan matriks *Toeplitz* tridiagonal	Matriks *Toeplitz* Tridiagonal	Struktur aljabar matriks *Circulant*	Kuantitatif	Ditemukan bentuk umum determinan untuk matriks *Toeplitz* tridiagonal.
7.	Ermawati et al. (2023)	Menghitung determinan matriks *Toeplitz* k-tridiagonal	Matriks *Toeplitz* k-tridiagonal	Determinan matriks *Toeplitz*	Kuantitatif	Kombinasi reduksi baris dan ekspansi kofaktor menghasilkan perhitungan determinan yang sistematis.
8.	Fitriyani, Helmi & Ramadhani (2018)	Menyajikan metode alternatif dalam menentukan determinan matriks n×n	Matriks umum	Determinan matriks	Kuantitatif	Terdapat beberapa pendekatan alternatif untuk menghitung determinan matriks berordo besar.
9.	Sari, Bakar & Yanita (2020)	Menghitung determinan matriks blok	Determinan, matriks blok	Determinan matriks blok	Kuantitatif	Komplemen *Schur* memberikan metode efisien dalam perhitungan determinan matriks blok.

10.	Kırklar & Yılmaz (2015)	Mengkaji determinan matriks *Circulant-type* dengan barisan bilangan umum	Matriks *circulant -type*	Determinan matriks *Circulant*	Kuantitatif	Determinan matriks *Circulant-type* dapat dinyatakan melalui fungsi barisan bilangan tertentu.
11.	Haripras ad (2019)	Menentukan determinan matriks *Circulant* biner	Matriks *Circulant* Biner	Determinan matriks	Kuantitatif	Karakteristik determinan matriks *Circulant* dengan elemen biner berhasil dirumuskan.
12.	Da Fonseca, Kızılateş & Terzioğl u (2025)	Menentukan determinan dan faktorisasi matriks *Toeplitz* dengan entri bilangan Horadam	Matriks Toeplitz	Determinan dan faktorisasi	Kuantitatif	Struktur *Toeplitz* dengan barisan Horadam menghasilkan bentuk determinan dan faktorisasi khusus.
13.	Cervellin o & Ciccariel lo (2005)	Mengkaji determinan matriks *Vandermonde* dan *Toeplitz* multilevel	Matriks *Vanderm onde* & *Toeplitz*	Determinan matriks terstruktur	Kuantitatif	Terdapat hubungan struktural antara matriks *Vandermonde* dan *Toeplitz*.
14.	Yang, Xie & Stoica (2016)	Mengembangkan dekomposisi *Vandermonde* pada matriks *Toeplitz* multilevel	Matriks *Toeplitz* multileve l	Dekompos isi *Vandermo nde*	Kuantitatif	Dekomposisi *Vandermonde* dapat digunakan untuk analisis struktur *Toeplitz* dan aplikasi super-resolution.
15.	Guo & Zhang (2024)	Mengkaji determinan dan invertibilitas matriks *Circulant*	Matriks *Circulant*	Determinan dan invertibilit as	Kuantitatif	Kondisi invertibilitas matriks *Circulant* bergantung pada struktur

	elemen penyusunnya.

Metode *Condensation Dodgson* merupakan prosedur komputasi determinan yang memanfaatkan determinan submatriks 2×2 secara iteratif untuk mereduksi ukuran matriks hingga diperoleh satu elemen akhir sebagai nilai determinan. Fitriyani et al. (2018) menjelaskan bahwa metode alternatif dalam penentuan determinan matriks n×n dapat memberikan efisiensi dibandingkan ekspansi *Laplace* klasik, khususnya untuk matriks berukuran besar. Hal serupa juga ditunjukkan oleh Rahma et al. (2019) yang menjelaskan bahwa pada matriks dengan struktur khusus, determinan dapat dihitung menggunakan metode tertentu yang memanfaatkan pola elemen matriks sehingga proses komputasi menjadi lebih sistematis. Dalam konteks matriks *Circulant*, Fahlevi (2021) menunjukkan bahwa metode *Condensation Dodgson* dapat diterapkan secara sistematis untuk memperoleh determinan matriks *Circulant* tanpa harus melakukan ekspansi kofaktor penuh, sehingga lebih efisien untuk struktur berulang.

Namun demikian, metode *Condensation Dodgson* memiliki keterbatasan ketika terdapat elemen nol pada bagian interior matriks karena prosedur reduksi melibatkan pembagian terhadap elemen tertentu. Hal ini menjadi pertimbangan penting dalam implementasi numerik, terutama pada matriks yang tidak sepenuhnya terstruktur.

Matriks *Vandermonde* memiliki bentuk umum $v_{ij}=x_j^{i-1}$, sehingga determinannya berbentuk hasil kali selisih pasangan elemen. Seru (2021) menunjukkan bahwa struktur *Vandermonde* memungkinkan pendekatan alternatif dalam menghitung invers melalui metode pembagian sintetik tanpa secara langsung menghitung determinan. Struktur determinan *Vandermonde* yang eksplisit juga dianalisis oleh Cervellino dan Ciccariello (2005), yang menunjukkan keterkaitan antara determinan multilevel *Vandermonde* dan struktur *Toeplitz* tertentu. Meskipun bentuk determinannya eksplisit, matriks *Vandermonde* dikenal memiliki kondisi numerik yang buruk ketika nilai-nilai parameter berdekatan, sehingga sensitif terhadap kesalahan pembulatan.

Pada sisi lain, matriks *Circulant* merupakan kasus khusus dari matriks *Toeplitz* dengan sifat periodik. Aliatiningtyas et al. (2022) memberikan formula eksplisit untuk nilai eigen, determinan, dan invers matriks *Circulant*, yang menunjukkan bahwa struktur ini memungkinkan representasi spektral tertutup. Siswandi et al. (2023) meninjau nilai eigen matriks *Circulant* dari perspektif komputasi dan menunjukkan bahwa struktur berbasis deret geometri memberikan kemudahan dalam analisis spektrum. Penelitian oleh Hariprasad (2019) serta Kirklar dan Yilmaz (2015) memperkuat bahwa determinan matriks *Circulant* dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit berdasarkan barisan tertentu, yang meningkatkan efisiensi komputasi dibandingkan metode umum.

Representasi *Toeplitz* memberikan kerangka teoretis yang lebih luas untuk memahami matriks *Circulant* dan bentuk-bentuk turunannya. Selain itu, struktur khusus pada matriks juga dapat dimanfaatkan untuk menyederhanakan perhitungan determinan, seperti yang ditunjukkan oleh Sari et al. (2020) melalui penggunaan ekspansi Laplace dan komplemen Schur pada matriks blok. Rasmawati et al. (2021) menunjukkan bahwa determinan matriks *Toeplitz* k-

tridiagonal dapat dihitung menggunakan reduksi baris dan ekspansi kofaktor dengan bentuk umum yang sistematis. Ermawati et al. (2023) juga mengkaji determinan *Toeplitz* tridiagonal dan menemukan pola umum yang mempermudah perhitungan analitik. Lebih lanjut, da Fonseca et al. (2025) membahas determinan dan faktorisasi matriks *Toeplitz* dengan entri khusus, yang menunjukkan bahwa struktur diagonal konstan memberikan peluang untuk analisis faktorisasi yang lebih stabil secara aljabar.

Hubungan antara matriks *Vandermonde* dan *Toeplitz* juga muncul dalam beberapa penelitian terutama dalam konteks dekomposisi matriks, seperti yang dikaji oleh Yang et al. (2016), yang menunjukkan bahwa matriks *Toeplitz* multilevel dapat direpresentasikan melalui dekomposisi *Vandermonde* dalam konteks aplikasi resolusi super. Hal ini menunjukkan bahwa kedua matriks tersebut sebenarnya tidak sepenuhnya terpisah secara konseptual, melainkan dapat dipahami dalam kerangka spektral yang lebih luas.

Dari perspektif stabilitas numerik, matriks *Circulant* dan *Toeplitz* cenderung lebih stabil karena memiliki representasi spektral eksplisit dan struktur diagonal yang konsisten. Guo dan Zhang (2024) menunjukkan bahwa invertibilitas matriks *Circulant* dapat dianalisis secara sistematis melalui sifat polinomial pembangkitnya. Sebaliknya, matriks *Vandermonde* sering menghadapi permasalahan *ill-conditioning* sehingga implementasi metode *Condensation Dodgson* harus dilakukan dengan hati-hati. Oleh karena itu, efektivitas metode *Condensation Dodgson* sangat dipengaruhi oleh struktur matriks yang digunakan dan kondisi numeriknya.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil kajian literatur yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa metode *Condensation Dodgson* dapat menjadi alternatif yang cukup menarik dalam perhitungan determinan matriks khususnya pada matriks yang memiliki struktur tertentu. Pada matriks *Circulant*, pola elemen yang berulang membuat metode ini dapat diterapkan secara relatif lebih sistematis. Proses reduksi yang terjadi selama kondensasi cenderung tetap mempertahankan struktur matriks sehingga perhitungan determinan menjadi lebih teratur. Sementara itu, matriks *Vandermonde* memiliki bentuk determinan yang eksplisit secara aljabar. Namun dalam praktik komputasi, matriks ini sering menghadapi persoalan stabilitas numerik, terutama ketika parameter yang digunakan memiliki nilai yang saling berdekatan. Melalui perspektif *Toeplitz*, hubungan antara matriks sirkuler dan *Vandermonde* dapat dipahami dalam kerangka yang lebih luas pendekatan ini membantu menjelaskan keterkaitan struktur dan sifat spektral kedua jenis matriks tersebut. Secara umum, dapat dikatakan bahwa efektivitas metode *Condensation Dodgson* tidak hanya bergantung pada metode teori determinan tetapi juga pada struktur matriks serta kondisi numerik yang menyertainya

DAFTAR PUSTAKA

[1] E. Fitriyani, Helmi, and E. W. Ramadhani, "Metode Alternatif dalam Menentukan Determinan Matriks n×n," *BIMASTER: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 7, no. 14, pp. 335-342, 2018, access: https://jurnal.untan.ac.id/index.php/jbmstr/article/view/28615

[2] M. R. Fahlevi, "Determinan Matriks Sirkulan Dengan Metode Kondensasi Dodgson," *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, vol. 18, no. 2, pp. 211–220, Dec. 2021, doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2021.v18.i2.15497, access: https://bestjournal.untad.ac.id/index.php/JIMT/article/view/15497

[3] A. Cervellino and S. Ciccariello, "The Determinants of Some Multilevel Vandermonde and Toeplitz Matrices," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, no. 45, 2005 https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/45/001. Access: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/38/45/001

[4] N. Aliatiningtyas, S. Guritman, and T. Wulandari, "On the Explicit Formula for Eigenvalues, Determinant, and Inverse of Circulant Matrices," *Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika (JTAM),* vol. 6, no. 3, pp. 711-721, Aug. 2022, doi: https://doi.org/10.31764/jtam.v6i3.8616, access: https://journal.ummat.ac.id/index.php/jtam/article/view/8616

[5] C. M. Da Fonseca, C. Kızılateş, and N. Terzioğlu, "The determinant and a factorization of a Toeplitz matrix with some type of Horadam numbers entries," *Logic Journal of the IGPL*, vol. 33, no. 6, pp. 1-10, 2025, doi: https://doi.org/10.1093/jigpal/jzae065, access: https://www.researchgate.net/publication/380516980_The_determinant_and_a_factorization_of_a_Toeplitz_matrix_with_some_type_of_Horadam_numbers_entries

[6] A. N. Rahma, K. Swandayani, and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks FLScircr Bentuk Khusus n×n (n ≥ 3) Menggunakan Metode Salihu," *Jurnal Fourier*, vol. 8, no. 1, pp. 27–34, Apr. 2019, doi: https://doi.org/10.14421/fourier.2019.81.27-34, access: https://fourier.or.id/index.php/FOURIER/article/view/86

[7] F. Seru, "Metode pembagian sintetik untuk menghitung invers matriks Vandermonde dan aplikasinya dalam memprediksi harga saham," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 10, no. 4, pp. 519-526, Dec. 2021, doi: https://doi.org/10.25077/jmu.10.4.519-526.2021, access: https://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/view/896

[8] S. Siswandi, S. Guritman, N. Aliatiningtyas, and T. Wulandari, "A Computation Perspective for the Eigenvalues of Circulant Matrices Involving Geometric Progression," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 12, no. 1, pp. 65-76, 2023, access: https://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/view/1062

[9] M. Hariprasad, "Determinant of Binary Circulant Matrices," *Special Matrices*, vol. 7, no. 1, pp. 92–94, Jan. 2019, doi: https://doi.org/10.1515/spma-2019-0008, access: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/spma-2019-0008/html

[10] E. Kirklar and F. Yilmaz, "On the Determinants of Some Kinds of Circulant-Type Matrices with Generalized Number Sequences," *Special Matrices*, vol. 3, no. 1, pp. 235-243, Jan. 2015, doi:

https://doi.org/10.1515/spma-2015-0023, access: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/spma-2015-0023/html

[11] W. P. Sari, N. N. Bakar, and Y. Yanita, "Menghitung Determinan Matriks Blok Menggunakan Ekspansi Laplace dan Komplemen Schur," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 9, no. 2, pp. 138–145, Jun. 2020 https://doi.org/10.25077/jmu.9.2.138-145.2020, access: https://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/view/582

[12] R. Rasmawati, L. Yahya, A. R. Nuha, and R. Resmawan, "Determinan suatu matriks Toeplitz k-tridiagonal menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor," *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 9, no. 1, pp. 6-15, Jun. 2021,doi: https://doi.org/10.34312/euler.v9i1.10354, access: https://ejurnal.ung.ac.id/index.php/Euler/article/view/10354

[13] Ermawati, S. Fatmasari, and T. A. Nurman, "Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal," *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, vol. 4, no. 1, pp. 33–39, Apr. 2023, access: https://journal.uin-alauddin.ac.id/index.php/msa/article/view/37263

[14] Z. Yang, L. Xie, and P. Stoica, "Vandermonde Decomposition of Multilevel Toeplitz Matrices with Application to Super-Resolution," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 62, no. 6, pp. 3685-3701, 2016, doi: https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2553041, access: https://arxiv.org/pdf/1505.02510

[15] X. Guo and X. Zhang, "Determinants and Invertibility of Circulant Matrices," *Electronic Research Archive*, vol. 32, no. 5, pp. 4741-4751, 2024, doi: https://doi.org/10.1109/WCST.2015.7414844, access: https://aimspress.com/article/doi/10.3934/era.2024216