

Hubungan Transformasi Laplace Dengan Transformasi Aboodh Dan Aplikasinya Pada Persamaan Diferensial Biasa

Nisa Sukma Lestari^{1,a)}, Dadang Ruhiat^{2,b)}, dan Siti Dwi Rahayu Septiani^{3,c)}

^{1,2,3}Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Bale Bandung

^{a)}nisasukmal11@gmail.com

^{b)}dadangwiraruhiat@gmail.com

^{c)}haruna.ayu@gmail.com

Abstrak. Persamaan diferensial biasa telah banyak mengambil andil dalam berbagai ilmu. Namun tidak semua solusi persamaan diferensial dapat dipecahkan dengan metode analitik, sehingga metode numerik menjadi alternatif lain dalam memecahkan persamaan diferensial biasa. Setelah dilakukan analisis lebih dalam ternyata transformasi integral menjadi titik terang dalam memecahkan persamaan diferensial biasa secara metode analitik. Maka dengan tujuan untuk memecahkan persamaan diferensial biasa ini diperkenalkanlah berbagai solusi dari transformasi integral seperti transformasi Laplace dan transformasi Aboodh. Tujuan dari penelitian ini yaitu mencari hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh serta aplikasinya pada persamaan diferensial biasa. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa transformasi Laplace memiliki hubungan dengan transformasi Aboodh baik dilihat dari definisinya maupun dari sifat-sifatnya. Kemudian dari hubungan tersebut dapat diaplikasikan dalam memecahkan persamaan diferensial biasa.

Kata kunci: Transformasi Laplace, Transformasi Aboodh, Persamaan Diferensial Biasa.,

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang terdapat turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas[6]. Transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh menjadi alternatif penyelesaian PDB linier secara analitik pada beberapa kasus PDB yang tidak dapat di selesaikan dengan cara pemisahan variabel, faktor integrasi, dll.

Selain mencari pemecahan PDB linier orde satu dan orde dua menggunakan masing-masing transformasi Laplace dan Transformasi Aboodh. Penelitian ini juga mencari hubungan antara transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh, kemudian mengaplikasikan hubungan tersebut untuk mencari pemecahan PDB Linier orde satu dan orde dua.

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan diferensial ialah persamaan yang menghubungkan, mengandung, melibatkan diferensial atau turunan satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas dari suatu fungsi yang belum diketahui. Maka pemecahan solusi persamaan diferensial adalah dengan mencari fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut.

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang terdapat turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas[6]. Jika pada persamaan diferensial terdapat variabel terikat dan derivatifnya berderajat tunggal

atau tidak terdapat perkalian antar variabel tak bebas dengan turunannya maka persamaan diferensial tersebut linier, jika sebaliknya maka persamaan diferensial tersebut non-linier. Jika tiap suku dari persamaan merupakan variabel terikat atau salah satu dari suku ini adalah turunannya maka persamaan diferensial tersebut merupakan persamaan homogen, jika sebaliknya maka persamaan tersebut tidak homogen [4].

Contoh persamaan diferensial biasa linier

$$(1) \frac{d^2u}{dt^2} + 4 \frac{du}{dt} + 4y = 0$$

$$(2) y''' + 5xy'' + y = 0$$

$$(3) 4 \frac{du}{dt} + 4y = 16$$

Contoh persamaan diferensial parsial non-linier

$$(1) \frac{du}{dt} = u \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$(2) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 4 \left(\frac{dx}{\partial t}\right)^3 = 2t$$

$$(3) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = z \frac{d^4z}{dx^4}$$

Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan sebuah operasi matematika yang bisa dijadikan sebagai jalan alternatif dalam pemecahan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial. Transformasi Laplace merupakan transformasi yang dikaitkan dengan waktu. Untuk pertama kalinya transformasi Laplace diperkenalkan oleh seorang matematikawan asal Prancis sekaligus guru besar di Paris bernama Pierre Simon Marquis De Laplace.

Definisi 2.2.1 Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t yang tertentu untuk $t > 0$. Transformasi Laplace dari $f(t)$, yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$ didefinisikan sebagai berikut,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

dengan parameter s adalah real.

Teorema 2.2.2 Linieritas Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan suatu operasi linier. Maka, untuk setiap $f(t)$ dan $g(t)$ yang transformasinya ada dan setiap konstanta c_1 dan c_2 . Transformasi dari $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ ada maka,

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Teorema 2.2.3 Turunan Pertama dan Kedua dari Fungsi Transformasi Laplace

Turunan pertama dan kedua transformasi Laplace dari $f(t)$ memenuhi,

$$(1) \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$(2) \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Formula (1) berlaku jika $f(t)$ kontinu untuk setiap $t \geq 0$ dan memenuhi batasan pertumbuhan (2) dan $f'(t)$ kontinu sepotong-sepotong pada setiap interval berhingga pada semi sumbu $t \geq 0$. Demikian pula (2) berlaku jika f dan f' kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi batasan pertumbuhan dan f'' adalah kontinu pada setiap interval hingga pada semi sumbu $t \geq 0$.

Teorema 2.2.4 Turunan f^n dari Fungsi Transformasi Laplace

Misalkan $f, f', \dots, f^{n-1}$ kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi batas pertumbuhan (2). Selanjutnya, misalkan f^n kontinu sepotong-sepotong pada setiap interval pada semi sumbu $t \geq 0$. Maka transformasi dari f^n memenuhi,

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

Teorema 2.2.5 Integral dari Fungsi Transformasi Laplace

Jika $F(s)$ definisi transformasi dari fungsi $f(t)$ yang kotinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ dan memenuhi batas pertumbuhan (2). Maka, untuk $s > 0, s > k$ dan $t > 0$.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s}F(s) \quad \text{jadi} \quad \int_0^t f(u) du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}$$

Teorema 2.2.6 Konvolusi dari Transformasi Laplace

Transformasi Laplace dari konvolusi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah hasil kali transformasi Laplace dari $f(t)$ dan $g(t)$, dengan kata lain,

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Teorema 2.2.7 Teorema pergeseran s (s -Shifting) dari Transformasi Laplace

Jika $f(t)$ memiliki transformasi $F(s)$ dimana $s > k$ untuk beberapa k , maka $e^{at}f(t)$ memiliki transformasi $F(s - a)$ dimana $s - a > k$, maka dalam formula,

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

Atau dalam bentuk invers,

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\}$$

Teorema 2.2.8 Teorema pergeseran t (t -Shifting) dari Transformasi Laplace

Jika $f(t)$ memiliki transformasi $F(s)$, maka fungsi pergeserannya,

$$(1) \quad g(t) = f(t - a)u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ f(t - a) & \text{if } t > a \end{cases}$$

memiliki transformasinya $e^{-as}F(s)$. Dengan begitu, jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka,

$$(2) \quad \mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$$

Atau, dalam bentuk invers dapat ditulis,

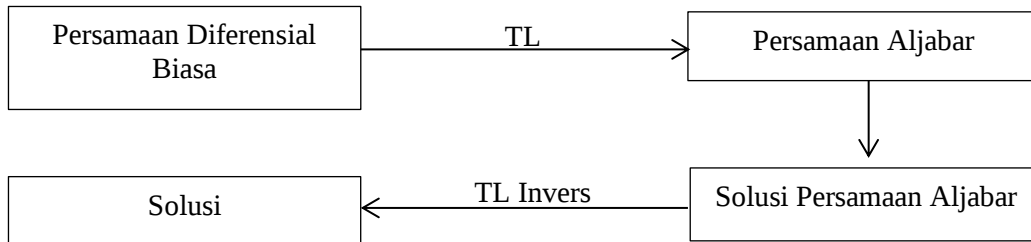
$$(3) \quad f(t - a)u(t - a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

Tabel 1 Fungsi-Fungsi dengan Pemecahan Transformasi Laplace

No	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	No	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	C	$\frac{C}{s}, s > 0$	8	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > 0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > 0$
4	e^{at}	$\frac{1}{s - a}, s > 0$	11	$t \cosh at$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}, s > 0$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$	12	$t \sinh at$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}, s > 0$

No	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	No	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
6	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$	13	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s > 0$
7	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$			

Alur pemecahan dari penerapan transformasi Laplace pada persamaan diferensial biasa,



Gambar 1 Alur Pemecahan Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Transformasi Laplace.

Transformasi Aboodh

Pada tahun 2013 Khalid Suliman Aboodh memperkenalkan transformasi integral baru yang bernama transformasi Aboodh. Sama seperti halnya transformasi Laplace, transformasi Aboodh juga dapat dijadikan sebagai alternatif untuk pemecahan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial serta menggunakan integral tak wajar.

Transformasi Aboodh diturunkan dari integral Fourier klasik. Berdasarkan kesederhanaan matematis dari transformasi Elzaki dan sifat fundamentalnya [1].

Definisi 2.3.1 transformasi Aboodh didefinisikan oleh operator A dengan,

$$A\{f(t)\} = K(v) = \frac{1}{v} \int_0^{\infty} f(t) e^{-vt} dt, \text{ dengan } t \geq 0, k_1 \leq v \leq k_2$$

Variabel v dalam transformasi ini digunakan untuk memfaktorkan variabel t dalam argumen fungsi f .

Teorema 2.3.2 Linieritas Transformasi Aboodh

Untuk setiap $f(t)$ dan $g(t)$ yang transformasinya ada dan setiap konstanta c_1 dan c_2 . Transformasi dari $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ ada, maka:

$$A\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 A\{f(t)\} + c_2 A\{g(t)\}$$

Dengan c_1, c_2 adalah sembarang konstanta.

Teorema 2.3.3 Turunan Transformasi Aboodh

Jika $A\{f(t)\} = K(v)$ maka turunan transformasi Aboodh dari $f(t)$ memenuhi,

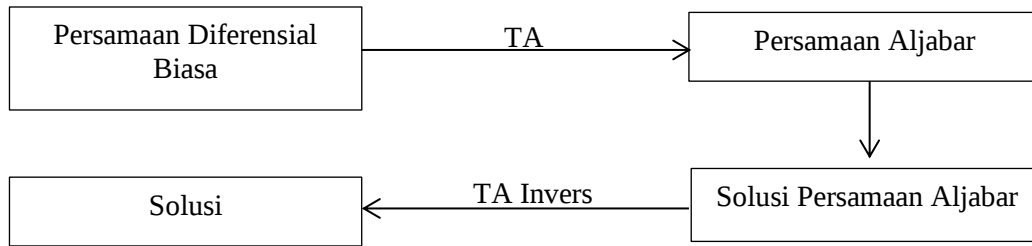
- (1) $A\{f'(t)\} = vA(f) - \frac{f(0)}{v} = vK(v) - \frac{f(0)}{v}$
- (2) $A\{f''(t)\} = v^2 A(f) - \frac{f'(0)}{v} - f(0) = v^2 K(v) - \frac{f'(0)}{v} - f(0)$
- (3) $A\{f^n(t)\} = v^n A(f) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^{(k)}(0)}{v^{2-n+k}} \right) = v^n K(v) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^{(k)}(0)}{v^{2-n+k}} \right)$

Teorema 2.3.4 Konvolusi Transformasi Aboodh

Transformasi Aboodh dari konvolusi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah hasil kali transformasi Aboodh dari $f(t)$ dan $g(t)$, dengan kata lain:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = vF(v)G(v)$$

Alur pemecahan dari penerapan transformasi Aboodh pada persamaan diferensial biasa,



Gambar 2 Alur Pemecahan Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Transformasi Aboodh

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang dipakai pada penelitian ini adalah penelitian murni atau dapat disebut penelitian dasar atau juga disebut penelitian pokok. Penelitian murni adalah penelitian yang dapat digunakan untuk mengembangkan suatu ilmu pengetahuan yang di peruntukkan pada mengembangkan teori-teori yang telah ada atau digunakan untuk menemukan teori baru. Sumber penelitian berasal dari jurnal maupun dari buku yang menjelaskan mengenai persamaan diferensial, kalkulus dan lainnya yang dapat mendukung terhadap penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh

Teorema 1. Diberikan $f(t) \in A$ dengan $F(s)$ adalah transformasi Laplace dan $K(v)$ adalah transformasi Aboodh, maka $K(v) = \frac{1}{v} F(v)$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.2.1 $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ dan Definisi 2.3.1 $K(v) = \frac{1}{v} \int_0^\infty f(t) e^{-vt} dt$, maka diperoleh

$$K(v) = \frac{1}{v} \int_0^\infty f(t) e^{-vt} dt$$

$$K(v) = \frac{1}{v} F(v)$$

Akibat

Diberikan $f(t) \in A$ dengan $F(s)$ adalah transformasi laplace dan $K(v)$ adalah transformasi Aboodh, maka $F(s) = s K(s)$

Bukti: Berdasarkan teorema 4.1.1.1 dan misalkan $s = v$, diperoleh

$$K(v) = \frac{1}{v} F(v)$$

$$K(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

$$K(s)s = \frac{1}{s} s F(s)$$

$$F(s) = s K(s)$$

Berikut adalah hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh berdasarkan teorema linieritas:

Teorema 2. Linieritas Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan suatu operasi linier. Maka, untuk setiap $f(t)$ dan $g(t)$ yang transformasinya ada dan setiap konstanta c_1 dan c_2 . Transformasi dari $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ ada, maka:

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Teorema 3. Linieritas Transformasi Aboodh

Untuk setiap $f(t)$ dan $g(t)$ yang transformasinya ada dan setiap konstanta c_1 dan c_2 . Transformasi dari $c_1f(t) + c_2g(t)$ ada, maka:

$$A\{c_1f(t) + c_2g(t)\} = c_1A\{f(t)\} + c_2A\{g(t)\}$$

Dengan c_1, c_2 adalah sembarang konstanta.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 4.1.1.1,

$$\begin{aligned} A\{c_1f(t) + c_2g(t)\} &= \frac{1}{v} \mathcal{L}\{c_1f(t) + c_2g(t)\} \\ &= \frac{1}{v} \int_0^{\infty} [c_1f(t) + c_2g(t)]e^{-vt} dt \\ &= c_1 \frac{1}{v} \int_0^{\infty} f(t)e^{-vt} dt + c_2 \frac{1}{v} \int_0^{\infty} g(t)e^{-vt} dt \\ &= c_1A\{f(t)\} + c_2A\{g(t)\} \end{aligned}$$

Maka terbukti transformasi Aboodh memiliki sifat linieritas.

Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh Berdasarkan Teorema Turunan Fungsi

Berikut adalah hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh berdasarkan teorema turunan fungsi:

Teorema 4. Turunan Pertama dan Kedua dari Fungsi Transformasi Laplace

Turunan pertama dan kedua transformasi Laplace dari $f(t)$ memenuhi:

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s\mathcal{L}(f) - f(0) \\ (2) \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Formula (1) berlaku jika $f(t)$ kontinu untuk setiap $t \geq 0$ dan memenuhi batasan pertumbuhan (2) dan $f'(t)$ kontinu sepotong-sepotong pada setiap interval berhingga pada semi sumbu $t \geq 0$. Demikian pula (2) berlaku jika f dan f' kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi batasan pertumbuhan dan f'' adalah kontinu pada setiap interval hingga pada semi sumbu $t \geq 0$.

Teorema 5. Turunan f^n dari Fungsi Transformasi Laplace

Misalkan $f, f', \dots, f^{n-1}$ kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi batas pertumbuhan (2). Selanjutnya, misalkan f^n kontinu sepotong-sepotong pada setiap interval pada semi sumbu $t \geq 0$. Maka transformasi dari f^n memenuhi:

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

Teorema 6. Turunan Fungsi Transformasi Aboodh

Jika $A\{f(t)\} = K(v)$ maka turunan transformasi Aboodh dari $f(t)$ memenuhi,

$$\begin{aligned} (1) \quad A\{f'(t)\} &= vA(f) - \frac{f(0)}{v} = vK(v) - \frac{f(0)}{v} \\ (2) \quad A\{f''(t)\} &= v^2A(f) - \frac{f'(0)}{v} - f(0) = v^2K(v) - \frac{f'(0)}{v} - f(0) \\ (3) \quad A\{f^n(t)\} &= v^nA(f) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^{(k)}(0)}{v^{2-n+k}} \right) = v^nK(v) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^{(k)}(0)}{v^{2-n+k}} \right) \end{aligned}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 4.1.1.1,

$$\begin{aligned} K(v) &= \frac{1}{v} F(v) \\ K'(v) &= \frac{1}{v} F'(v) = \frac{1}{v} (vF(v) - f(0)) = vK(v) - \frac{f(0)}{v} \end{aligned}$$

Pembuktian (2) berdasarkan penerapan bukti (1) untuk f'' dan kemudian substitusi (1), maka

$$\begin{aligned} K(v) &= \frac{1}{v} F(v) \\ K''(v) &= \frac{1}{v} F''(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v} (vF'(v) - f'(0)) \\
&= \frac{1}{v} (v(vF(v) - f(0)) - f'(0)) = v^2 K(v) - \frac{f'(0)}{v} - f(0)
\end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian (1) dan (2), maka dapat kita simpulkan untuk turunan Transformasi Aboodh ke-n sehingga,

$$A\{f^n(t)\} = v^n A(f) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^k(0)}{v^{2-n+k}} \right) = v^n K(v) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^k(0)}{v^{2-n+k}} \right)$$

Maka, terbukti transformasi Aboodh memiliki sifat turunan.

Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh Berdasarkan Teorema Integral Fungsi

Berikut adalah hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh berdasarkan teorema integral fungsi:

Teorema 7. Integral dari Fungsi Transformasi Laplace

Jika $F(s)$ definisi transformasi dari fungsi $f(t)$ yang kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ dan memenuhi batas pertumbuhan (2). Maka, untuk $s > 0, s > k$ dan $t > 0$.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad \text{jadi} \quad \int_0^t f(u) du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} F(s)\right\}$$

Teorema 8. Integral dari Fungsi Transformasi Aboodh

$$A\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{K(v)}{v} \quad \text{jadi} \quad \int_0^t f(u) du = A^{-1}\left\{\frac{1}{v} K(v)\right\}$$

Bukti:

Misalkan $g(t) = \int_0^t f(u) du$ maka $g'(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f(t) \\
\frac{1}{v} \mathcal{L}\{g'(t)\} &= \frac{1}{v} \mathcal{L}\{f(t)\}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{v} (v \mathcal{L}\{g(t)\} - 0) = K(v)$$

$$v \frac{1}{v} \mathcal{L}\{g(t)\} = K(v)$$

$$A\{g(t)\} = \frac{K(v)}{v}$$

$$\text{Maka } A\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{K(v)}{v}$$

Kemudian dalam bentuk invers,

$$f(u) = A^{-1}\{K(v)\}$$

Sehingga,

$$\int_0^t f(u) du = A^{-1}\left\{\frac{1}{v} K(v)\right\}$$

Maka, terbukti transformasi Aboodh memiliki sifat integral. *Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh Berdasarkan Teorema Konvolusi*

Berikut adalah hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh berdasarkan teorema konvolusi:

Teorema 9. Konvolusi dari Transformasi Laplace

Transformasi Laplace dari konvolusi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah hasil kali transformasi Laplace dari $f(t)$ dan $g(t)$, dengan kata lain,

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Teorema 10. Konvolusi Transformasi Aboodh

Transformasi Aboodh dari konvolusi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah hasil kali transformasi Aboodh dari $f(t)$ dan $g(t)$, dengan kata lain:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = vF(v)G(v)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi 2.2.7 Konvolusi dan berdasarkan Teorema 4.1.1.1 sehingga,

$$\begin{aligned} A\{f * g\} &= \frac{1}{v} \mathcal{L}\{f * g\} \\ A\{f * g\} &= \frac{1}{v} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(y)g(t-y)dy \right) e^{-vt} dt \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty f(y)dy \left(\int_0^\infty g(t-y)e^{-vt} dt \right) \end{aligned}$$

Misalkan $u = t - y$, maka $t = u + y$ dan $dt = du$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} A\{f * g\} &= \frac{1}{v} \int_0^\infty f(y)dy \left(\int_0^\infty g(u)e^{-v(u+y)} du \right) \\ &= \left(\frac{1}{v} \int_0^\infty f(y)e^{-vy} dy \right) \left(\frac{1}{v} \int_0^\infty g(u)e^{-vu} du \right) v \\ &= vF(v)G(v) \end{aligned}$$

Maka, terbukti transformasi Aboodh memiliki sifat konvolusi.

Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh Berdasarkan Teorema Pergeseran s atau v (s-Shifting atau v-Shifting)

Berikut adalah hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh berdasarkan teorema pergeseran s atau v:

Teorema 11. Teorema pergeseran s (s-Shifting) dari Transformasi Laplace

Jika $f(t)$ memiliki transformasi $F(s)$ dimana $s > k$ untuk beberapa k , maka $e^{at}f(t)$ memiliki transformasi $F(s - a)$ dimana $s - a > k$, maka dalam formula:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

Atau dalam bentuk invers,

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\}$$

Teorema 12. Teorema pergeseran v (v-Shifting)

Jika $f(t)$ memiliki transformasi $K(v)$ dimana $v > k$ untuk beberapa k , maka $e^{at}f(t)$ memiliki transformasi $K(v - a)$ dimana $v - a > k$, maka dalam formula:

$$A\{e^{at}f(t)\} = K(v - a)$$

Atau dalam bentuk invers,

$$e^{at}f(t) = A^{-1}\{K(v - a)\}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 12

$$\begin{aligned} K(v - a) &= \frac{1}{v} F(v - a) \\ K(v - a) &= \frac{1}{v} \int_0^\infty f(t)e^{-(v-a)t} dt = \frac{1}{v} \int_0^\infty [e^{at}f(t)]e^{-vt} dt = A\{e^{at}f(t)\} \end{aligned}$$

Jika $K(v)$ ada untuk v lebih besar dari beberapa k , maka integral pertama ada untuk $v - a > k$. Kemudian dalam bentuk invers,

$$f(t) = A^{-1}\{K(v)\}$$

Sehingga,

$$e^{at}f(t) = A^{-1}\{K(v - a)\}$$

Maka terbukti jika $A\{e^{at}f(t)\} = K(v-a)$ atau dalam bentuk inversnya $e^{at}f(t) = A^{-1}\{K(v-a)\}$. Maka terbukti transformasi Aboodh memiliki sifat pergeseran v (v -Shifting).

Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh Berdasarkan Teorema Pergeseran t (t -Shifting)

Berikut adalah hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh berdasarkan teorema pergeseran t :

Teorema 13. Teorema pergeseran t (t -Shifting) dari Transformasi Laplace

Jika $f(t)$ memiliki transformasi $F(s)$, maka fungsi pergeserannya:

$$(1) \quad g(t) = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ f(t-a) & \text{if } t > a \end{cases}$$

memiliki transformasinya $e^{-as}F(s)$. Dengan begitu, jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka:

$$(2) \quad \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Atau, dalam bentuk invers dapat ditulis:

$$(3) \quad f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

Teorema 14. Teorema pergeseran t (t -Shifting) dari Transformasi Aboodh

Diberikan $K(v)$ adalah transformasi Aboodh dari $f(t)$, $A\{f(t)\} = K(v)$

Jika $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$ maka $A\{g(t)\} = e^{-va}K(v)$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 4.1.1.1,

$$\begin{aligned} A\{g(t)\} &= \frac{1}{v} \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= \frac{1}{v} \left[\int_0^a g(t)e^{-vt} dt + \int_a^\infty g(t)e^{-vt} dt \right] \\ &= \frac{1}{v} \left[0 + \int_a^\infty f(t-a)e^{-vt} dt \right] = \frac{1}{v} \int_a^\infty f(t-a)e^{-vt} dt \end{aligned}$$

Misalkan $\tau = t - a$, maka $t = \tau + a$, $dt = d\tau$, sehingga:

$$\begin{aligned} A\{g(t)\} &= \frac{1}{v} \int_0^\infty f(\tau)e^{-v(\tau+a)} d\tau \\ &= e^{-va} \frac{1}{v} \int_0^\infty f(\tau)e^{-v\tau} d\tau = e^{-va}K(v) \end{aligned}$$

Maka terbukti transformasi Aboodh memiliki sifat pergeseran t (t -Shifting).

Fungsi-Fungsi Transformasi Aboodh

Tabel 2 Fungsi-fungsi dengan Pemecahan Transformasi Aboodh

No.	$f(t)$	$A\{f(t)\}$	No.	$f(t)$	$A\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{v^2}$	9	$\sinh at$	$\frac{a}{v(v^2 - a^2)}$
2	t	$\frac{1}{v^3}$	10	$\mathcal{C}$	$\frac{\mathcal{C}}{v^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{v^4}$	11	$t \cos at$	$\frac{v^2 - a^2}{v(v^2 + a^2)^2}$
4	$t^n, n \geq 0$	$\frac{n!}{v^{n+2}}$	12	$t \sin at$	$\frac{2a}{(v^2 + a^2)^2}$

No.	$f(t)$	$A\{f(t)\}$	No.	$f(t)$	$A\{f(t)\}$
5	e^{at}	$\frac{1}{v^2 - av}$	13	$t \cosh at$	$\frac{v^2 + a^2}{v(v^2 - a^2)^2}$
6	$\cos at$	$\frac{1}{v^2 + a^2}$	14	$t \sinh at$	$\frac{2a}{v^2(v^2 - a^2)}$
7	$\sin at$	$\frac{a}{v(v^2 + a^2)}$	15	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{v} \sqrt{\frac{\pi}{v}}$
8	$\cosh at$	$\frac{1}{v^2 - a^2}$			

Pemecahan Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Transformasi Laplace

Berikut adalah beberapa contoh pemecahan persamaan diferensial biasa orde satu dan orde dua menggunakan transformasi Laplace:

Ingat:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \text{ atau } \mathcal{L}\{y''\} = s^2 \mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \text{ atau } \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(y) = Y$$

1. $\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0, y(0) = \frac{4}{3}$

Penyelesaian:

$$y' + 4y - e^{-x} = 0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{e^{-x}\} = 0$$

$$(sY - y(0)) + 4Y - \left(\frac{1}{s+1}\right) = 0$$

$$\left(sY - \frac{4}{3}\right) + 4Y - \left(\frac{1}{s+1}\right) = 0$$

$$Y(s+4) - \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{s+1}\right) = 0$$

$$Y = \frac{4s+7}{3(s+1)(s+4)}$$

Maka faktor dari persamaan laplacenya adalah,

$$Y = \frac{4s+7}{3(s+1)(s+4)} = \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{(s+4)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+7}{3(s+1)(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} + e^{-4t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $\frac{1}{3}e^{-t} + e^{-4t}$.

2. $y'' + y = 2e^{-t}, y(0) = y'(0) = 0$

Penyelesaian :

$$y'' + y = 2e^{-t}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{2e^{-t}\}$$

$$(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + Y = 2\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$Y = \frac{2}{(s^2+1)(s+1)}$$

Maka faktor dari persamaan laplacenya adalah,

$$Y = \frac{2}{(s^2+1)(s+1)} = -\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)} + \frac{1}{(s+1)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+1)(s+1)}\right\} = -\cos t + \sin t + e^{-t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $-\cos t + \sin t + e^{-t}$.

Pemecahan Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Transformasi Aboodh

Berikut adalah beberapa contoh pemecahan persamaan diferensial biasa orde satu dan orde dua menggunakan transformasi Aboodh:

Ingat:

$$A\{f''(t)\} = v^2 K(v) - \frac{f'(0)}{v} - f(0) \text{ atau } A\{y''\} = v^2 Y - \frac{y'(0)}{v} - y(0)$$

$$A\{f'(t)\} = vK(v) - \frac{f(0)}{v} \text{ atau } A\{y'\} = vY - \frac{y(0)}{v}$$

$$A\{f(t)\} = A(y) = Y$$

1. $\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0, y(0) = \frac{4}{3}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0$$

$$y' + 4y - e^{-x} = 0$$

$$\left(vY - \frac{y(0)}{v}\right) + 4Y - \left(\frac{1}{v^2 + v}\right) = 0$$

$$\left(vY - \frac{4/3}{v}\right) + 4Y - \left(\frac{1}{v^2 + v}\right) = 0$$

$$Y = \frac{\frac{4}{3}}{(v^2 + 4v)} + \frac{v}{(v^2 + 4v)(v^2 + v)}$$

Maka faktor dari persamaan adalah,

$$Y = \frac{\frac{3}{3}}{(v^2 + 4v)} + \frac{\frac{1}{3}}{(v^2 + v)}$$

Invers dari persamaan adalah,

$$\begin{aligned} A^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{3}}{(v^2 + 4v)} + \frac{v}{(v^2 + 4v)(v^2 + v)}\right\} \\ = \frac{1}{3}A^{-1}\left\{\frac{1}{v^2 + v}\right\} + A^{-1}\left\{\frac{1}{v^2 + 4v}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} + e^{-4t} \end{aligned}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $\frac{1}{3}e^{-t} + e^{-4t}$.

2. $y'' + y = 2e^{-t}, y(0) = y'(0) = 0$

$$A\{y''\} + A\{y\} = A\{2e^{-t}\}$$

$$A\{y''\} + A\{y\} = 2A\{e^{-t}\}$$

$$\left(v^2 Y - \frac{f'(0)}{v} - f(0)\right) + Y = 2\left(\frac{1}{v^2 + v}\right)$$

$$Y = \frac{2}{v(v+1)(v^2+1)}$$

Maka faktor dari persamaannya adalah,

$$Y = \frac{1}{v}\left(\frac{2}{(v+1)(v^2+1)}\right) = -\frac{1}{(v^2+1)} + \frac{1}{v(v^2+1)} + \frac{1}{(v^2+v)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$A^{-1}\left\{\frac{2}{v(v+1)(v^2+1)}\right\} = -\cos t + \sin t + e^{-t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $-\cos t + \sin t + e^{-t}$.

Aplikasi Hubungan Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh pada Pemecahan Persamaan Diferensial Biasa

Berikut adalah beberapa contoh pemecahan persamaan diferensial biasa orde satu dan orde dua menggunakan transformasi Aboodh dengan transformasi Laplace:

1. $\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0, y(0) = \frac{4}{3}$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan Teorema 4.1.1.1

$$K(v) = \frac{1}{v} F(v)$$

Maka,

$$\begin{aligned} K(v) &= \frac{1}{v} (\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{e^{-x}\} = 0) \\ &= \frac{1}{v} \left((vF(v) - y(0)) + 4F(v) - \left(\frac{1}{v+1}\right) = 0 \right) \\ &= \frac{1}{v} \left(\left(vF(v) - \frac{4}{3}\right) + 4F(v) - \left(\frac{1}{v+1}\right) = 0 \right) \\ &= \frac{1}{v} \left(F(v) = \frac{4v+7}{3(v+1)(v+4)} \right) \end{aligned}$$

Maka faktor dari persamaannya adalah,

$$K(v) = \frac{1}{v} F(v) = \frac{1}{v} \left(\frac{4v+7}{3(v+1)(v+4)} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(v^2+v)} \right) + \frac{1}{(v^2+4v)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$A^{-1} \left\{ \frac{1}{v} \left(\frac{4v+7}{3(v+1)(v+4)} \right) \right\} = \frac{1}{3} e^{-t} + e^{-4t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $\frac{1}{3} e^{-t} + e^{-4t}$.

b. Berdasarkan Akibat 4.1.1.2

$$F(s) = s K(s)$$

Maka,

$$\begin{aligned} F(s) &= s (A\{y'\} + 4A\{y\} - A\{e^{-x}\} = A\{0\}) \\ &= s \left(\left(sK(s) - \frac{y(0)}{s} \right) + 4K(s) - \left(\frac{1}{s^2+s} \right) = 0 \right) \\ &= s \left(\left(sK(s) - \frac{4/3}{s} \right) + 4K(s) - \left(\frac{1}{s^2+s} \right) = 0 \right) \\ F(s) &= \frac{4s+7}{3(s+1)(s+4)} \end{aligned}$$

Maka faktor dari persamaannya adalah,

$$F(s) = \frac{4s+7}{3(s+1)(s+4)} = \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{(s+4)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+7}{3(s+1)(s+4)} \right\} = \frac{1}{3} e^{-t} + e^{-4t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $\frac{1}{3} e^{-t} + e^{-4t}$.

2. $y'' + y = 2e^{-t}, y(0) = y'(0) = 0$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan Teorema 4.1.1.1

$$K(v) = \frac{1}{v} F(v)$$

Maka,

$$\begin{aligned}
K(v) &= \frac{1}{v} (\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{2e^{-t}\}) \\
&= \frac{1}{v} \left((v^2 F(v) - vy(0) - y'(0)) + F(v) = 2 \left(\frac{1}{v+1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{v} \left(v^2 F(v) - 0 - 0 + F(v) = \frac{2}{v+1} \right) \\
K(v) &= \frac{1}{v} \left(\frac{2}{(v+1)(v^2+1)} \right)
\end{aligned}$$

Maka faktor dari persamaannya adalah,

$$K(v) = \frac{1}{v} \left(\frac{2}{(v+1)(v^2+1)} \right) = -\frac{1}{(v^2+1)} + \frac{1}{v(v^2+1)} + \frac{1}{(v^2+v)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$A^{-1} \left\{ \frac{2}{v(v+1)(v^2+1)} \right\} = -\cos t + \sin t + e^{-t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $-\cos t + \sin t + e^{-t}$.

- b. Berdasarkan Akibat 4.1.1.2

$$F(s) = s K(s)$$

Maka,

$$F(s) = s (A\{y''\} + A\{y\} = A\{2e^{-t}\})$$

$$= s \left(\left(s^2 K(s) - \frac{f'(0)}{s} - f(0) \right) + K(s) = 2 \left(\frac{1}{s^2 + s} \right) \right)$$

Didapat,

$$F(s) = s \left(K(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{2}{(s^2+1)(s+1)} \right) \right)$$

Maka faktor dari persamaannya adalah

$$F(s) = -\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)} + \frac{1}{(s+1)}$$

Invers dari persamaannya adalah,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s^2+1)(s+1)} \right\} = -\cos t + \sin t + e^{-t}$$

Maka penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $-\cos t + \sin t + e^{-t}$.

Perbandingan Antara Transformasi Laplace dengan Transformasi Aboodh dalam pada Pemecahan Persamaan Diferensial Biasa

Berdasarkan opini peneliti setelah melakukan analisis pada transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh dalam pemecahan persamaan diferensial biasa orde satu dan orde dua menyatakan bahwa menggunakan transformasi Laplace lebih baik dibandingkan menggunakan transformasi Aboodh dilihat dari bagaimana kita mencari faktor-faktor pada proses persamaan aljabarnya.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada BAB IV peneliti dapat menyimpulkan bahwa:

1. Transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh memiliki hubungan baik dari definisi maupun dari sifat-sifatnya seperti sifat linieritas, turunan fungsi, integral fungsi, konvolusi, pergeseran s atau v dan pergeseran t. Secara definisi hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh dapat dinyatakan dalam bentuk $K(v) = \frac{1}{v} F(v)$ dan $F(s) = s K(s)$.
2. Peneliti menambahkan beberapa fungsi pada tabel 2 seperti:

- a. $A\{C\} = \frac{C}{v^2}$
- b. $A\{t \cos at\} = \frac{v^2 - a^2}{v(v^2 + a^2)^2}$
- c. $A\{t \sin at\} = \frac{2a}{(v^2 + a^2)^2}$
- d. $A\{t \cosh at\} = \frac{v^2 + a^2}{v(v^2 - a^2)^2}$
- e. $A\{t \sinh at\} = \frac{2a}{v^2(v^2 - a^2)}$
- f. $A\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\pi}{v}}$

3. Persamaan diferensial biasa linier orde satu dan dua dapat dipecahkan oleh transformasi Laplace.
4. Persamaan diferensial biasa linier orde satu dan dua dapat dipecahkan oleh transformasi Aboodh.
5. Persamaan diferensial biasa linier orde satu dan dua dapat dipecahkan oleh hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Aboodh.
6. Dalam pemecahan persamaan diferensial biasa linier orde satu dan orde dua menggunakan transformasi Laplace lebih baik dibandingkan menggunakan transformasi Aboodh dilihat dari bagaimana kita mencari faktor-faktor pada proses persamaan aljabarnya.

REFERENSI

1. [1] Aboodh, K. S, The New integral transform “Aboodh Transform”, Global Journal of pure and applied mathematics, Vol 9 No 1, 2013. h. 35-43.
2. [2] Debnath, L., & Bhatta D, Integral transform and their application third edition, Taylor and Francis Group, New York, 2015.
3. [3] Kreyzig, E, Advance engineering mathematics 10th edition, 2011.
4. [4] Makrup, L, Model sistem fisik dengan persamaan diferensial parsial dan aplikasinya dalam keteknikan, Yogyakarta, Pustaka Pelajar, 2015.
5. [5] Patil, D. P, Aboodh and Mahgoub transform in boundary Value problems of System of ordinary differential equations. International Journal of Advanced Research in Science, Communication and Technology (IJARSCT), Vol 6 No 1, 2022. h. 67-75
6. [6] Ross, S. L, Introduction to ordinary differential equations, New York, *John Willey & Sons, Inc*, 1989.
7. [7] Shaikh, S. L, Introducing a new integral transform: Sadik Transform, American International Journal of Research in Science, Technology, Engineering & Mathematics, Vol 22 No 02, 2018. h. 100-102.
8. [8] Wijaya, A, Yulida, Y, Faisal, F, Hubungan antara Transformasi Laplace dengan Transformasi Elzaki. Epsilon, Jurnal Matematika Murni Dan Terapan, Vol 9 No 1, 2015. h. 12-19.