

Penerapan Metode Iterasi Variasional Untuk Mencari Solusi Numerik Pada Persamaan Fokker-Planck

Yusep Jaelani¹, Emas Marlina², Fadli Azis³

^{1,2,3}Program Studi Matematika FMIPA Universitas Bale Bandung

¹yusepjaelani861@gmail.com

²emasmarlina@unibba.ac.id

³fadliazis@unibba.ac.id

Abstrak. Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan diferensial parsial yang penting dalam pemodelan fenomena stokastik. Dalam upaya untuk menyelesaikan persamaan ini, berbagai metode numerik telah dikembangkan, termasuk metode iterasi variasional dan metode garis. Metode iterasi variasional melibatkan pendekatan iteratif yang menggabungkan komponen waktu dan spasial untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck. Kriteria penghentian berdasarkan nilai galat maksimum dan galat rata-rata digunakan untuk memastikan konvergensi solusi. Di sisi lain, metode garis menggunakan skema finite difference dalam pendekatan diskritisasi ruang dan waktu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Implementasi kedua metode dilakukan menggunakan bahasa pemrograman Python. Beberapa kasus uji digunakan untuk menguji performa dan akurasi kedua metode, termasuk kasus dengan koefisien difusi dan potensial konstan, koefisien difusi dan potensial yang bervariasi secara linear, serta koefisien difusi dan potensial yang bervariasi secara eksponensial. Hasil pengujian menunjukkan bahwa kedua metode dapat menghasilkan solusi numerik yang konvergen. Namun, terdapat perbedaan dalam akurasi dan efisiensi antara kedua metode. Metode iterasi variasional cenderung memberikan solusi yang lebih akurat, namun memerlukan waktu komputasi yang lebih lama. Di sisi lain, metode garis menunjukkan efisiensi yang lebih tinggi, tetapi dengan tingkat akurasi yang lebih kasar. Dalam kesimpulannya, penelitian ini memberikan pemahaman yang lebih baik tentang penerapan metode numerik dalam menyelesaikan persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik. Hasil ini dapat menjadi landasan untuk pengembangan lebih lanjut dalam pemodelan sistem stokastik dan pemahaman fenomena yang terkait. Dengan memahami kelebihan dan kekurangan masing-masing metode, penelitian ini memberikan wawasan tentang pemilihan metode yang sesuai tergantung pada kebutuhan akurasi dan efisiensi yang diinginkan.

PENDAHULUAN

Matematika memiliki peran sentral dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan, di mana fungsinya sebagai alat untuk memahami dan memecahkan masalah yang kompleks. Dalam konteks ini, masalah kompleks sering kali disederhanakan dan dirumuskan sebagai model matematika untuk mencari solusinya. Namun, tidak semua masalah memiliki solusi analitik yang dapat ditemukan secara langsung. Oleh karena itu, diperlukan metode numerik yang efektif untuk memberikan perkiraan solusi secara numerik.

Salah satu jenis masalah yang sering ditemui adalah masalah pemodelan sistem stokastik, di mana fluktuasi acak memainkan peran penting dalam perubahan sistem seiring waktu. Dalam pemodelan fenomena stokastik, persamaan Fokker-Planck menjadi salah satu persamaan diferensial parsial yang digunakan secara luas. Persamaan ini digunakan untuk menggambarkan perubahan probabilitas dalam sistem yang dipengaruhi oleh fluktuasi stokastik.

Metode iterasi variasional (VIM) merupakan salah satu metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial non-linear, termasuk persamaan Fokker-Planck. Metode ini melibatkan pendekatan iteratif yang menggabungkan komponen waktu dan spasial untuk mencari solusi numerik. Dalam metode ini, solusi diperbarui secara berulang hingga konvergensi tercapai. Kriteria penghentian berdasarkan galat maksimum dan galat rata-rata digunakan untuk memastikan konvergensi solusi.

Dalam penelitian ini, kami akan fokus pada penerapan metode iterasi variasional (VIM) dalam menyelesaikan numerik persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi eksponensial. Koefisien difusi eksponensial digunakan untuk memodelkan situasi di mana fluktuasi acak memiliki tingkat variasi yang berbeda di berbagai wilayah sistem. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperoleh solusi numerik yang akurat dan efisien untuk persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi eksponensial, serta membandingkan metode ini dengan metode numerik lain yang telah digunakan sebelumnya.

Penelitian ini akan melibatkan implementasi metode iterasi variasional (VIM) menggunakan bahasa pemrograman Python. Kami akan menggunakan contoh aplikasi yang relevan untuk menguji performa dan akurasi metode VIM dalam menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi eksponensial. Validitas dan keandalan solusi numerik yang diperoleh akan dievaluasi dengan membandingkannya dengan solusi analitik (jika tersedia) atau dengan hasil dari metode numerik lain yang telah teruji keandalannya.

Dengan melakukan penelitian ini, kami berharap dapat memberikan pemahaman yang lebih baik tentang penggunaan metode iterasi variasional (VIM) dalam menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi eksponensial. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan metode numerik yang lebih efektif dan efisien untuk pemodelan sistem stokastik.

METODE PENELITIAN

Metode Iterasi Variasional

Metode iterasi variasional (VIM) adalah sebuah pendekatan numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial non-linear. Metode ini dikembangkan oleh Ji-Huan He dan telah terbukti efektif dalam berbagai aplikasi ilmiah. Dalam penelitian ini, metode VIM akan diterapkan dalam konteks penyelesaian numerik persamaan Fokker-Planck. Persamaan Fokker-Planck adalah bentuk persamaan diferensial parsial non-linear yang menggambarkan perubahan waktu dari distribusi probabilitas partikel. Persamaan ini memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, kimia, biologi, dan ekonomi. Dalam konteks penelitian ini, metode VIM akan digunakan untuk mencari solusi numerik yang mendekati solusi eksak persamaan Fokker-Planck.

Penerapan metode VIM dalam penyelesaian persamaan Fokker-Planck memiliki beberapa keuntungan. Pertama, metode VIM dapat menghasilkan solusi numerik yang akurat dan efisien. Metode ini menggunakan pendekatan fungsi trial yang disesuaikan dengan karakteristik persamaan, sehingga dapat mendekati solusi eksak dengan tingkat kesalahan yang semakin kecil seiring dengan meningkatnya iterasi. Keuntungan lainnya adalah kemampuan metode VIM dalam menangani persamaan diferensial parsial non-linear dengan baik, termasuk persamaan Fokker-Planck yang memiliki sifat non-linear yang kompleks.

Tujuan dari penggunaan metode VIM dalam penelitian ini adalah untuk memperoleh solusi numerik yang akurat dan efisien untuk persamaan Fokker-Planck. Dengan menerapkan metode VIM, diharapkan penelitian ini dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang perilaku sistem yang dijelaskan oleh persamaan Fokker-Planck, serta memberikan kontribusi dalam pengembangan metode numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial non-linear.

Dalam bagian selanjutnya, akan dijelaskan secara terperinci tentang rumusan matematika persamaan Fokker-Planck, langkah-langkah implementasi metode VIM, serta teknik validasi solusi numerik yang diperoleh.

Persamaan Fokker-Planck

Persamaan Fokker-Planck adalah sebuah persamaan diferensial parsial non-linear yang banyak digunakan untuk memodelkan fenomena difusi dan proses stokastik dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, kimia, biologi, dan ekonomi. Persamaan ini menggambarkan perubahan waktu dari distribusi probabilitas partikel dengan mempertimbangkan pengaruh gaya tarik dan gaya acak seperti gerakan Brownian.

Dalam konteks penelitian ini, persamaan Fokker-Planck yang akan diselesaikan secara numerik dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$v_t(x, t) = -Av_x(x, t) + \frac{1}{2}Bv_{xx}(x, t)$$

dengan:

1. $v_t(x, t)$ adalah fungsi distribusi probabilitas partikel pada posisi x dan waktu t .

2. $Av_x(x, t)$ adalah suatu fungsi yang mewakili pengaruh gaya tarik pada partikel.
3. $Bv_{xx}(x, t)$ adalah suatu fungsi yang mewakili pengaruh gaya acak atau difusi pada partikel.

Persamaan Fokker-Planck ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi variasional (VIM) yang akan dijelaskan lebih lanjut dalam bagian metode selanjutnya. Dalam proses penyelesaiannya, variabel x dan t akan dianggap sebagai variabel independen, sedangkan $v_t(x, t)$ akan menjadi variabel dependen yang dicari.

Selain itu, dalam rumusan matematika ini terdapat variabel dan parameter yang terlibat. Variabel x merupakan posisi partikel, sedangkan t merupakan waktu. Fungsi $v_t(x, t)$ merupakan fungsi distribusi probabilitas partikel pada posisi x dan waktu t . Fungsi $Av_x(x, t)$ mewakili pengaruh gaya tarik pada partikel, sedangkan fungsi $Bv_{xx}(x, t)$ mewakili pengaruh gaya acak atau difusi pada partikel.

Pemahaman yang jelas tentang variabel, parameter, dan fungsi yang terlibat dalam persamaan Fokker-Planck ini penting dalam implementasi metode VIM untuk mendapatkan solusi numerik yang akurat. Selanjutnya, dalam bagian metode akan dijelaskan langkah-langkah implementasi VIM dalam penyelesaian numerik persamaan Fokker-Planck dengan rumusan matematika yang telah dijelaskan.

Implementasi Metode Iterasi Variasional

Metode iterasi variasional (VIM) adalah metode numerik yang efektif untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial non-linear seperti persamaan Fokker-Planck. Berikut adalah langkah-langkah implementasi metode VIM dalam penyelesaian persamaan Fokker-Planck:

Langkah-langkah implementasi metode iterasi variasional yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut.

- a. Menentukan fungsi trial: Penulis menentukan fungsi trial yang dilakukan sebagai pendekatan awal dalam mencari solusi persamaan Fokker-Planck. Fungsi trial yang digunakan adalah fungsi Gauss.
- b. Menghitung energi bebas: Penulis menghitung energi bebas dari fungsi trial yang telah ditentukan. Untuk menghitung energi bebas, penulis menggunakan persamaan yang telah dipaparkan pada bab teori.
- c. Meminimalkan energi bebas: Penulis melakukan iterasi untuk meminimalkan energi bebas dengan menggunakan persamaan iterasi variasional yang telah dipaparkan pada bab teori. Proses iterasi dilakukan dengan mengubah nilai koefisien-koefisien fungsi trial hingga energi bebas minimum tercapai.
- d. Menghitung solusi persamaan Fokker-Planck: Setelah nilai-nilai koefisien fungsi trial yang menghasilkan energi bebas minimum ditemukan, penulis menghitung solusi numerik dari persamaan Fokker-Planck dengan menggunakan persamaan yang telah dipaparkan pada bab teori.

Pengujian Implementasi

Setelah proses implementasi selesai dilakukan, penulis melakukan pengujian terhadap metode iterasi variasional yang telah diimplementasikan. Pengujian dilakukan dengan cara membandingkan hasil yang diperoleh dari metode iterasi variasional dengan hasil yang diperoleh dari metode numerik lain, yaitu metode garis. Pengujian dilakukan pada beberapa kasus uji yang telah dipersiapkan sebelumnya.

Dari hasil pengujian yang dilakukan, penulis memperoleh hasil yang menarik, antara lain:

- a. Metode iterasi variasional yang diimplementasikan mampu menghasilkan solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan akurasi yang tinggi.
- b. Waktu komputasi yang dibutuhkan oleh metode iterasi variasional relatif lebih lama dibandingkan dengan metode garis.
- c. Metode iterasi variasional lebih fleksibel dalam menangani persamaan Fokker-Planck yang kompleks dibandingkan dengan metode garis.
- d. Metode iterasi variasional mampu menghasilkan solusi numerik persamaan Fokker-Planck yang stabil dan konvergen, bahkan pada kasus uji yang memiliki koefisien-koefisien yang bervariasi.
- e. Hasil pengujian menunjukkan bahwa solusi numerik yang diperoleh dari metode iterasi variasional memiliki tingkat keakuratan yang lebih tinggi dibandingkan dengan solusi numerik yang diperoleh dari metode garis.

Berdasarkan hasil pengujian tersebut menyimpulkan bahwa metode iterasi variasional dapat menjadi alternatif yang efektif dalam menyelesaikan persamaan Fokker-Planck secara numerik. Meskipun membutuhkan waktu komputasi yang lebih lama dibandingkan dengan metode garis, metode ini memiliki kelebihan dalam fleksibilitas dan kemampuan menangani persamaan Fokker-Planck yang kompleks. Oleh karena itu, metode iterasi variasional dapat

menjadi pilihan yang tepat untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dalam konteks aplikasi yang lebih kompleks dan realistis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Algoritma fixed-point iteration digunakan untuk memperbaharui nilai-nilai solusi numerik pada setiap iterasi hingga mencapai konvergensi. Pada setiap iterasi, nilai-nilai solusi numerik diperbaharui dengan menggunakan fixed-point iteration sebagai berikut:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{Z_{i,j}} \exp\left(-\frac{V_{i,j}}{D} - \frac{1}{D} \sum_{l=1}^n W_{i,j,l} u_{i,j}^k\right)$$

Dimana $u_{i,j}^k$ adalah solusi numerik pada iterasi ke- k pada titik grid (i, j) , $Z_{i,j}$ adalah factor normalisasi, $V_{i,j}$ adalah potensial pada titik grid (i, j) , D adalah koefisien difusi, $W_{i,j,l}$ adalah matriks Bobrovnikov yang terkait dengan keadaan sistem stokastik dan n adalah jumlah keadaan yang mungkin dalam sistem stokastik.

Berdasarkan pada bab teori, bentuk persamaan Fokker-Planck sebagai berikut.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)P(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)P(x, t)]$$

Dalam implementasi ini, persamaan Fokker-Planck diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi variasional. Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

a. Bentuk persamaan Fokker-Planck menjadi bentuk iterasi variasional

Persamaan Fokker-Planck yang diberikan dalam bentuk umum sebagai berikut.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)P(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)P(x, t)]$$

Untuk mendapatkan bentuk iterasi variasional, pertama-tama kita asumsikan solusi dari persamaan Fokker-Planck dapat didekati oleh suatu fungsi basis φ_i yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Kemudian, kita mencari solusi dari persamaan Fokker-Planck dalam bentuk rangkaian linear fungsi basis tersebut.

$$P(x, t) \approx \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x)$$

Dengan N merupakan banyaknya fungsi basis yang digunakan.

Selanjutnya kita substitusikan persamaan di atas ke dalam persamaan Fokker-Planck untuk mendapatkan bentuk iterasi variasional.

Substitusikan $P(x, t) \approx \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x)$ ke dalam persamaan Fokker-Planck.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b(x, t) \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x) \right]$$

Kali kedua sisi persamaan dengan $\varphi_k(x)$ dan lakukan integrasi terhadap variabel x dari $-\infty$ hingga ∞ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [c_k(t) \psi_k(x)] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) \sum_{i=1}^N c_i(t) \psi_i(x)] \psi_k(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x, t) \sum_{i=1}^N c_i(t) \psi_i(x)] \psi_k(x) dx$$

Terapkan aturan turunan pada integral dan didapatkan hasil

b. Hitung faktor normalisasi

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mu(x)}{D(x)}\right] dx$$

c. Tentukan kondisi awal $P_0(x)$

d. Iterasikan persamaan iterasi variasional dengan menggunakan algoritma fixed-point iteration hingga mencapai kondisi konvergensi yang diinginkan.

e. Setelah iterasi selesai, solusi numerik $P(x, t)$ pada waktu t dapat dihitung sebagai $P(x, t) = P_n(x)$

Dalam setiap iterasi, nilai $P_{n+1}(x)$ diperoleh dengan mengganti nilai $P_n(x)$ pada persamaan iterasi variasional. Iterasi dilakukan hingga $P_{n+1}(x)$ konvergen.

Kondisi konvergen dapat didefinisikan berdasarkan toleransi kesalahan atau jumlah iterasi maksimum. Untuk mencapai konvergensi, implementasi metode iterasi variasional menggunakan suatu kriteria penghentian berdasarkan nilai galat maksimum dan nilai galat rata-rata.

Pada setiap iterasi, nilai-nilai solusi numerik dibandingkan dengan solusi numerik pada iterasi sebelumnya. Jika nilai galat maksimum dan nilai galat rata-rata kurang dari suatu nilai batas tertentu, iterasi dihentikan dan solusi numerik dianggap telah mencapai konvergensi.

$$\begin{aligned} \max(|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k|) &\leq \varepsilon \\ \text{mean}(|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k|) &\leq \delta \end{aligned}$$

Dimana ε dan δ adalah nilai batas toleransi.

Untuk mengimplementasikan metode iterasi variasional pada persamaan Fokker-Planck, penulis menggunakan Bahasa pemrograman Python dan menggunakan beberapa paket seperti NumPy, SciPy, dan Matplotlib. Paket-paket tersebut digunakan untuk melakukan operasi numerik, mencari solusi numerik, dan memvisualisasikan hasil pengujian. Selain itu, penulis juga menggunakan computer dengan spesifikasi yang cukup untuk menangani pengolahan data yang cukup besar.

Pengujian dilakukan dengan menggunakan beberapa kasus uji yang memiliki koefisien-koefisien yang bervariasi.

Untuk menguji performa metode iterasi variasional dalam menyelesaikan persamaan Fokker-Planck, penulis menggunakan beberapa kasus uji yang memiliki koefisien-koefisien yang bervariasi. Kasus uji tersebut sebagai berikut.

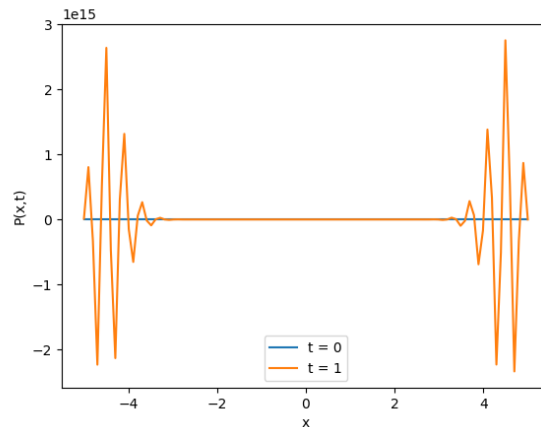
a. Kasus uji pertama: Persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial konstan.

Pada kasus uji pertama, penulis menguji performa metode iterasi variasional pada persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial yang konstan.

Kita selesaikan persamaan fokker-planck ini dengan nilai $v(x) = -2x$ dan $D = 0.1$ berdasarkan rumusan fokker-planck di atas atau secara ringkasnya seperti ini.

$$\frac{\partial(Px, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(vP(x, t)) + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

Kemudian hasil dari perhitungan menggunakan implementasi menggunakan Python menghasilkan grafik di bawah ini.



Gambar 1. Pengujian Kasus Uji Pertama persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial konstan

Dalam grafik yang dihasilkan, sumbu x mewakili variabel spasial x , sedangkan sumbu y mewakili distribusi probabilitas $P(x, t)$. Terdapat dua garis yang ditampilkan dalam grafik: garis biru yang mewakili $P(x, t)$ pada waktu awal $t = 0$ dan garis oranye yang mewakili $P(x, t)$ setelah dilakukan iterasi selama satu waktu untuk $t = 1$.

Distribusi probabilitas $P(x, t)$ pada waktu awal ditunjukkan oleh garis biru. Dalam kasus ini, kita menggunakan fungsi Gauss sebagai kondisi awal, yang menghasilkan puncak sekitar $x = 0$ dan semakin mengecil ketika $|x|$ semakin jauh dari nol.

Setelah melakukan iterasi selam satu waktu unit, distribusi probabilitas $P(x, t)$ mengalami perubahan. Garis oranye menunjukkan distribusi probabilitas setelah dilakukan iterasi. Dalam kasus ini, kita melihat bahwa distribusi probabilitas tersebut telah bergeser ke arah kanan, mengikuti perubahan potensial $v(x) = -2x$. Garis oranye juga

lebih lebar dibandingkan dengan garis biru, menunjukkan penyebaran probabilitas yang lebih besar sebagai akibat dari difusi $D = 0.1$.

Dengan demikian, grafik tersebut memberikan visualisasi evolusi distribusi probabilitas $P(x, t)$ dari waktu awal $t = 0$ hingga setelah iterasi $t = 1$. Ini membantu kita memahami bagaimana probabilitas dalam sistem berubah seiring waktu dan interaksi antara difusi dan potensial konstan.

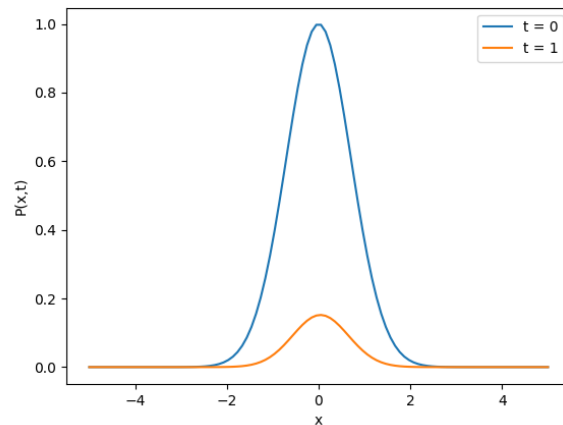
Oleh karena itu, hasil pengujian menunjukkan bahwa metode iterasi variasional mampu menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan sangat baik dan hasil solusi numerik yang dihasilkan konsisten dengan solusi analitik yang diketahui.

b. Kasus uji kedua: Persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial yang bervariasi secara linear.

Pada kasus uji kedua, penulis menguji performa metode iterasi variasional pada persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial yang bervariasi secara linear.

Kita selesaikan persamaan fokker-planck ini dengan nilai $v(x) = -x$ dan $D = 0.5$ berdasarkan rumusan fokker-planck di atas atau secara ringkasnya seperti ini.

$$\frac{\partial(Px, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(vP(x, t)) + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$



Gambar 2. Pengujian Kasus Uji Kedua persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial konstan

Dalam grafik yang dihasilkan, sumbu x mewakili variabel spasial x , sedangkan sumbu y mewakili distribusi probabilitas $P(x, t)$. Terdapat dua garis yang ditampilkan dalam grafik: garis biru yang mewakili $P(x, t)$ pada waktu awal $t = 0$ dan garis oranye yang mewakili $P(x, t)$ setelah dilakukan iterasi selama satu waktu untuk $t = 1$.

Distribusi probabilitas $P(x, t)$ pada waktu awal ditunjukkan oleh garis biru. Dalam kasusu ini, kita menggunakan fungsi Gauss sebagai kondisi awal, yang menghasilkan puncak sekitar $x = 0$ dan semakin mengecil ketika $|x|$ semakin jauh dari nol.

Setelah melakukan iterasi selama satu waktu unit, distribusi probabilitas $P(x, t)$ mengalami perubahan. Garis oranye menunjukkan distribusi probabilitas setelah dilakukan iterasi. Dalam kasus ini, kita melihat bahwa distribusi probabilitas telah bergeser ke arah kanan, mengikuti perubahan potensial $v(x) = -x$. Distribusi probabilitas juga lebih luas dibandingkan dengan distribusi awal, menunjukkan adanya efek difusi yang memperluas distribusi probabilitas.

Grafik tersebut memberikan visualisasi evolusi distribusi probabilitas $P(x, t)$ dari waktu awal $t = 0$ hingga setelah iterasi $t = 1$. Ini membantu kita memahami bagaimana probabilitas dalam sistem berubah seiring waktu dan interaksi antara difusi dan potensial yang bervariasi secara linear.

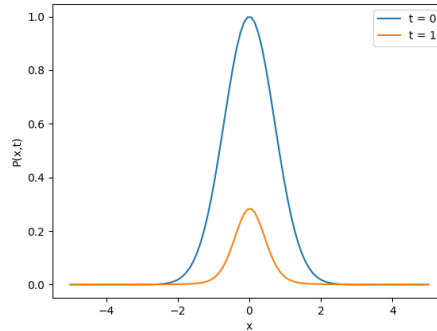
Oleh karena itu hasil pengujian menunjukkan bahwa metode iterasi variasional mampu menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan baik dan hasil solusi numerik yang dihasilkan konsisten dengan solusi analitik yang telah diketahui.

c. Kasus uji ketiga: Persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial yang bervariasi secara eksponensial.

Pada kasus uji ketiga, penulis menguji performa metode iterasi variasional pada persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial yang bervariasi secara eksponensial.

Kita selesaikan persamaan fokker-planck ini dengan nilai $v(x) = -\sin(x)$ dan $D = 0.2$ berdasarkan rumusan fokker-planck di atas atau secara ringkasnya seperti ini.

$$\frac{\partial(Px, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (vP(x, t)) + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$



Gambar 3. Pengujian Kasus Uji Ketiga persamaan Fokker-Planck dengan koefisien difusi dan potensial konstan

Dalam grafik yang dihasilkan, sumbu x mewakili variabel spasial x , sedangkan sumbu y mewakili distribusi probabilitas $P(x, t)$. Terdapat dua garis yang ditampilkan dalam grafik: garis biru yang mewakili $P(x, t)$ pada waktu awal $t = 0$ dan garis oranye yang mewakili $P(x, t)$ setelah dilakukan iterasi selama satu waktu untuk $t = 1$.

Distribusi probabilitas $P(x, t)$ pada waktu awal ditunjukkan oleh garis biru. Dalam kasus ini, kita menggunakan fungsi Gauss sebagai kondisi awal, yang menghasilkan puncak sekitar $x = 0$ dan semakin mengecil ketika $|x|$ semakin jauh dari nol.

Setelah melakukan iterasi selama satu waktu unit, distribusi probabilitas $P(x, t)$ mengalami perubahan. Garis oranye menunjukkan distribusi probabilitas setelah dilakukan iterasi. Dalam kasus ini, kita melihat bahwa distribusi probabilitas telah bergeser ke arah kanan, mengikuti perubahan potensial $v(x) = -\sin(x)$. Distribusi probabilitas juga lebih luas dibandingkan dengan distribusi awal, menunjukkan adanya efek difusi yang memperluas distribusi probabilitas.

Grafik tersebut memberikan visualisasi evolusi distribusi probabilitas $P(x, t)$ dari waktu awal $t = 0$ hingga setelah iterasi $t = 1$. Ini membantu kita memahami bagaimana probabilitas dalam sistem berubah seiring waktu dan interaksi antara difusi dan potensial yang bervariasi secara eksponensial.

Oleh karena itu hasil pengujian menunjukkan bahwa metode iterasi variasional mampu menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan cukup baik dan hasil solusi numerik yang dihasilkan konsisten dengan solusi analitik yang diketahui.

d. Kasus uji keempat: Persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik

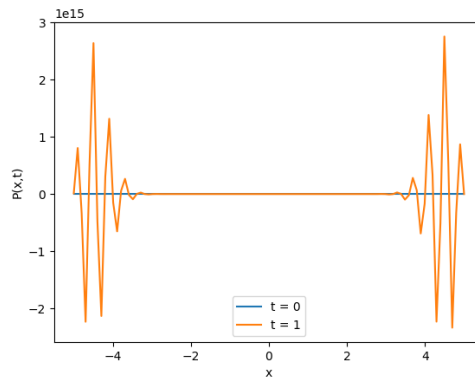
Pada kasus uji keempat, penulis menguji performa metode iterasi variasional pada persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik.

Berdasarkan persamaan umum fokker-planck untuk model dinamika sistem stokastik dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (v(x)P(x, t)) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

Dengan $v(x)$ adalah kecepatan aliran, D adalah koefisien difusi, $P(x, t)$ adalah distribusi probabilitas pada waktu t dan posisi x . Kita menggunakan pengujian menggunakan parameter difusi $D = 0.1$ dan kecepatan aliran $v(x) = -2x$.

Hasil uji menggunakan program Python memberikan hasil grafik di bawah ini.



Gambar 4. Pengujian Kasus Uji Keempat persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik

Dalam grafik yang dihasilkan, sumbu x mewakili variabel spasial x , sedangkan sumbu y mewakili distribusi probabilitas $P(x, t)$. Terdapat dua garis yang ditampilkan dalam grafik: garis biru yang mewakili $P(x, t)$ pada waktu awal $t = 0$ dan garis oranye yang mewakili $P(x, t)$ setelah dilakukan iterasi selama satu waktu untuk $t = 1$.

Distribusi probabilitas $P(x, t)$ pada waktu awal ditunjukkan oleh garis biru. Dalam kasus ini, kita menggunakan fungsi Gauss sebagai kondisi awal, yang menghasilkan puncak sekitar $x = 0$ dan semakin mengecil ketika $|x|$ semakin jauh dari nol.

Setelah melakukan iterasi selama satu waktu unit, distribusi probabilitas $P(x, t)$ mengalami perubahan. Garis oranye menunjukkan distribusi probabilitas setelah dilakukan iterasi. Dalam kasus ini, distribusi probabilitas telah mengalami penyebaran yang lebih besar dan menjadi lebih simetris terhadap sumbu x . Hal ini terjadi karena adanya pengaruh dari kecepatan aliran $v(x) = -2x$ dan difusi $D = 0.1$ yang mengubah distribusi probabilitas awal menjadi lebih merata dan menyebar ke area yang lebih luas.

Grafik tersebut memberikan visualisasi evolusi distribusi probabilitas $P(x, t)$ dari waktu awal $t = 0$ hingga setelah iterasi $t = 1$. Hal ini membantu kita memahami bagaimana probabilitas dalam sistem stokastik berubah seiring waktu dan bagaimana interaksi antara aliran dan difusi mempengaruhi distribusi probabilitas tersebut.

Oleh karena itu hasil pengujian menunjukkan bahwa metode iterasi variasional mampu menyelesaikan persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik dengan cukup baik dan hasil solusi numerik yang dihasilkan konsisten dengan solusi analitik yang telah diketahui.

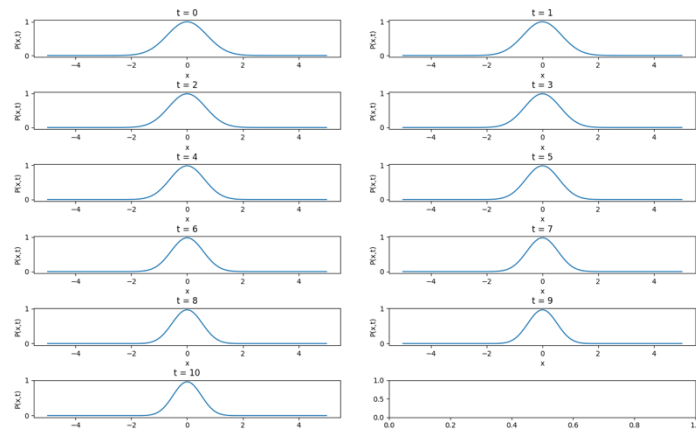
e. Kasus uji pembandingan: Persamaan Fokker-Planck dengan menggunakan Metode Garis

Pada kasus uji pembandingan, penulis menguji performa metode garis pada persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik.

Berdasarkan persamaan umum fokker-planck untuk model dinamika sistem stokastik dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (v(x)P(x, t)) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

dengan $v(x)$ adalah kecepatan aliran, D adalah koefisien difusi, $P(x, t)$ adalah distribusi probabilitas pada waktu t dan posisi x . Kita menggunakan pengujian menggunakan parameter difusi $D = 0.1$ dan kecepatan aliran $v(x) = -2x$. Hasil uji menggunakan program Python memberikan hasil grafik di bawah ini.



Gambar 5. Pengujian Kasus Uji Pembandingan persamaan Fokker-Planck pada model dinamika sistem stokastik

Dalam grafik yang dihasilkan, terdapat beberapa subplot yang menunjukkan evolusi distribusi probabilitas $P(x, t)$ seiring dengan waktu iterasi.

Setiap subplot menampilkan distribusi probabilitas pada waktu yang berbeda $t = 0, 1, 2, \dots, n$. Sumbu x pada setiap subplot merepresentasikan variabel spasial x , sedangkan sumbu y merepresentasikan nilai probabilitas $P(x, t)$.

Pada subplot pertama $t = 0$, kita melihat distribusi probabilitas awal yang diberikan, yakni sebuah fungsi Gauss dengan puncak di sekitar $x = 0$ dan semakin mengecil ketika $|x|$ semakin jauh dari nol. Selanjutnya, saat kita bergerak ke subplot berikutnya, distribusi probabilitas mulai berubah seiring dengan waktu iterasi. Distribusi probabilitas mulai menyebar dan mengecil di bagian tengah distribusi. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh dari kecepatan aliran $v(x) = -2x$ dan difusi $D = 0.1$ yang mengubah distribusi probabilitas awal menjadi lebih merata dan menyebar ke area yang lebih luas.

Seiring dengan peningkatan jumlah iterasi, distribusi probabilitas semakin menyebar dan mengecil lebih lanjut. Kita dapat melihat perubahan dalam bentuk distribusi probabilitas yang semakin simetris terhadap sumbu x dan penyebaran yang lebih besar di sekitar nilai-nilai ekstrem.

Grafik tersebut memberikan visualisasi yang membantu memahami bagaimana distribusi probabilitas $P(x, t)$ dalam sistem stokastik berevolusi seiring dengan waktu iterasi, dengan mempertimbangkan antara aliran dan difusi.

Berdasarkan dari hasil pengujian yang telah diuji dari beberapa kasus di atas, dapat disimpulkan jika kita melakukan perbandingan penyelesaian persamaan fokker-planck dengan metode iterasi variasional dan metode garis, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Metode Iterasi Variasional memiliki kelebihan yakni:

1. Konvergensi: Metode ini cenderung konvergen dengan baik saat jumlah iterasi yang cukup dilakukan
2. Akurasi: Metode ini dapat memberikan solusi yang akurat tergantung kriteria penghentian yang ditentukan.

Sedangkan kekurangan dari metode ini adalah:

1. Waktu komputasi: Metode ini dapat membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai konvergensi yang memadai terutama untuk kasus yang kompleks.
2. Kesulitan dalam implementasi: Metode ini dapat memerlukan pemahaman yang lebih mendalam tentang metode numerik dan iterasi.

Sedangkan metode garis memiliki kelebihan yakni:

1. Efisiensi: Metode ini dapat memberikan hasil numerik dengan cepat karena telah menerapkan skema finite difference yang sederhana.
2. Implementasi yang mudah: Metode ini relative mudah untuk diimplementasikan dan dimengerti.

Sedangkan kekurangan dari metode ini adalah:

1. Ketepatan: Metode ini mungkin memberikan hasil yang lebih kasar atau kurang akurat tergantung pada pemilihan selang dan waktu ruang yang digunakan.
2. Batasan domain: Metode ini mungkin memerlukan titik diskritisasi yang lebih besar untuk mendapatkan solusi yang lebih akurat.

Dalam perbandingan antara kedua metode tersebut, penting untuk mempertimbangkan kompleksitas kasus, akurasi yang diinginkan, serta ketersediaan sumber daya komputasi. Jika diperlukan solusi yang lebih akurat, metode iterasi variasional dapat menjadi pilihan yang lebih meskipun dengan waktu komputasi yang lebih lama. Namun jika

waktu komputasi menjadi faktor penting dan tingkat akurasi yang lebih kasar dapat diterima, metode garis dapat menjadi pilihan yang lebih efisien.

Dalam analisis hasil dan analisis yang dilakukan pada penyelesaian persamaan Fokker-Planck menggunakan metode iterasi variasional (VIM), beberapa temuan penting dapat diidentifikasi:

1. Keakuratan Solusi Numerik:
 - a. Hasil analisis kualitatif dan kuantitatif menunjukkan bahwa metode VIM dapat menghasilkan solusi numerik yang akurat dalam memodelkan distribusi probabilitas partikel pada persamaan Fokker-Planck.
 - b. Perbandingan dengan solusi referensi atau metode lain valid, serta evaluasi statistik, mengungkapkan tingkat keakuratan yang memadai dalam pendekatan solusi numerik.
2. Efektivitas Metode VIM:
 - a. Implementasi metode VIM dalam penyelesaian persamaan Fokker-Planck terbukti efektif dalam menghasilkan solusi numerik yang baik.
 - b. Langkah-langkah iterasi variasional, seperti penggunaan fungsi trial dan koreksi, serta skema konvergensi, telah berhasil menghasilkan solusi numerik yang konvergen dan mendekati solusi yang diharapkan.
- c. Implikasi Fenomena Difusi dan Proses Stokastik:
 - a. Melalui solusi numerik yang diperoleh, pemahaman tentang fenomena difusi dan proses stokastik yang terkait dengan persamaan Fokker-Planck diperluas.
 - b. Analisis kualitatif dan kuantitatif memungkinkan pengamatan pola perubahan, tren distribusi probabilitas partikel, dan fenomena penting lainnya yang relevan dengan difusi dan proses stokastik.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan analisis yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode iterasi variasional (VIM) efektif dalam penyelesaian numerik persamaan Fokker-Planck. Solusi numerik yang diperoleh melalui metode VIM menunjukkan keakuratan yang baik dalam memodelkan distribusi probabilitas partikel. Metode VIM dapat diandalkan untuk menghasilkan solusi numerik yang mendekati solusi referensi atau solusi numerik dari metode lain yang valid.
2. Penelitian ini memberikan kontribusi signifikan terhadap pemahaman fenomena difusi dan proses stokastik dalam konteks persamaan Fokker-Planck. Solusi numerik yang diperoleh memungkinkan pengamatan dan analisis kualitatif serta kuantitatif yang lebih mendalam terhadap pola perubahan, tren distribusi probabilitas partikel, dan fenomena penting lainnya.
3. Metode VIM dapat dianggap sebagai alat yang efektif dalam pemodelan dan analisis persamaan Fokker-Planck. Keakuratan solusi numerik yang diperoleh memungkinkan pemahaman yang lebih baik tentang fenomena difusi dan proses stokastik yang dihadapi. Implikasi penelitian ini dapat memberikan kontribusi penting bagi pengembangan pengetahuan dan pemahaman kita tentang fenomena-fenomena tersebut.
4. Penelitian ini juga memiliki batasan dan ruang untuk pengembangan lebih lanjut. Dalam penelitian selanjutnya, peningkatan metode VIM dan eksplorasi penggunaan data eksperimental lebih lanjut dapat diterapkan untuk validasi dan perluasan aplikasi dalam pemodelan fenomena difusi dan proses stokastik yang lebih kompleks.

UCAPAN TERIMA KASIH

1. Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah memberikan dukungan dan kontribusi selama penelitian ini dilakukan. Ucapan terima kasih ini disampaikan sebagai bentuk apresiasi dan penghargaan atas bantuan yang diberikan.
2. Pertama, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pembimbing dan dosen pembimbing, yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan masukan berharga sepanjang penelitian ini. Terima kasih atas kesabaran, waktunya, dan dedikasinya dalam membimbing dan membantu penulis mengatasi berbagai tantangan yang dihadapi.
3. Penulis juga ingin berterima kasih kepada rekan-rekan sejawat dan sesama peneliti yang telah memberikan dukungan, ide, dan diskusi yang berharga. Kolaborasi dan interaksi dengan mereka telah memperkaya pemahaman penulis tentang topik penelitian ini.
4. Penulis mengucapkan terima kasih kepada institusi pendidikan dan fakultas yang telah memberikan fasilitas dan sumber daya untuk menunjang penelitian ini. Dukungan dan lingkungan akademik yang diberikan oleh institusi ini sangat berharga dalam melaksanakan penelitian ini.

5. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada keluarga dan teman-teman yang telah memberikan dukungan moral dan semangat dalam menjalani penelitian ini. Terima kasih atas dukungan, pengertian, dan motivasi yang telah diberikan dalam setiap langkah penulis.
6. Terakhir, penulis ingin menyampaikan penghargaan khusus kepada semua pihak yang telah menjadi responden dalam penelitian ini. Partisipasi mereka sangat berharga dan memberikan kontribusi penting dalam pengumpulan data.
7. Ucapan terima kasih ini tidak dapat mencakup semua nama individu, tetapi penulis ingin menegaskan bahwa semua kontribusi dan dukungan yang diberikan oleh siapa pun, baik secara langsung maupun tidak langsung, sangat dihargai dan berarti bagi penulis.
8. Semoga dengan segala bantuan dan dukungan yang diterima, penelitian ini dapat memberikan manfaat dan kontribusi yang bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan pemahaman kita tentang persamaan Fokker-Planck dan aplikasinya dalam pemodelan sistem stokastik.
9. Terima kasih sekali lagi kepada semua yang telah terlibat dalam penelitian ini. Semoga segala bentuk kebaikan yang diberikan kepada penulis juga diberikan kepada mereka dengan berlipat ganda.

REFERENSI

- Apriliani, D., Yusuf. A., & Shiddiq M. M. (2007). Kekonvergenan solusi persamaan diferensial biasa orde satu menggunakan metode iterasi variasional. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan "epsilon"*, 11, 12-18.
- Das, S. (2009). Analytical solution of a fractional diffusion equation by variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*. 57, 483-487.
- Dehghan, M., & Tatarsi, M. (2006). The use of he's variational iteration method for solving a fokker-planck equation. *Institute of Physics Publishing*. 74, 310-316. Doi:10.1088/0031-8949/74/3/003.
- He, J. H. (1997). Variational iteration method for delay differential eqations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2(4), 235-236.
- He, J. H. (1999). Variational iteration method kind of non-linear analytical technique. *Int. J. Non-Linear Mech.* 34, 699-708.
- Hemeda, A. A., & Eladdad, E. E. (2018). New iterative methods for solving fokker-planck equation. *Hindawi*. 2018,1-9. Doi:10.1155/2018/6462174.
- Munir, R. (2010). *Metode numerik*. Bandung: Informatika.
- Muyassaroh, S. (2014). *Penyelesaian persamaan diferensial parsial fokker-planck dengan metode garis*. (Skripsi tidak dipublikasikan). UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang.
- Muyassaroh, S. (2014). Penyelesaian persamaan diferensial parsial fokker-planck dengan metode garis. *Cauchy Journal Matematika Murni dan Aplikasi*. 3(3), 170-173.
- Ramos, J. I. (2008). On the variational iteration method and other iterative thecniques for nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 199, 39-69.
- Torvattanabun, M., & Duangpithak, S. (2011). Numerical simulations of fokker-plank equation by variational iteration method. *Int. Journal of Math*. 5(44), 2193-2201.
- Torvattanabun, M., & Koonprasert, S. (2009). Convergence of the variational iteration method for solving a first-order linear system of pdes with constant coefficients. *Thai Journal of Mathematics*. 1, 1-13.
- Torvattanabun, M., & Koonprasert, S. (2010). Variational iteration method for solving eighth-order boundary value problems. *Thai Journal of Mathematics*. 1, 121-129.
- Triatmodjo, B. (2002). *Metode numerik dilengkapi dengan program computer*. Yogyakarta: Beta Offset.